・流体力学

流体力学とは、水や空気などが流れる現象を力学的に解析する学問です。具体的には流体に作用する力を式で表し、収支を取ることから始まります。質量の収支と取れば連続の式が導出され、運動量の収支を取ればナヴィエ・ストークスの式が導出されます。また、流体には粘性力や圧力、重力などの力が作用します。

様々な場合の流れの現象が解析的に解かれていますが、ここでは数値計算に必要な内容を書きたいと思います。

・流体

流体とは水や空気などの流れる物質のことを言います。流体力学は流体を対象にしています。流体を考える最小単位を流体粒子と呼びます。これは、分子オーダーよりも大きくなります。

・流体の物性

流体力学には次の様な物性が影響します。

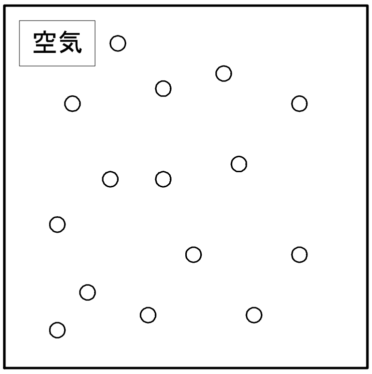
密度ρ[kg/m^3]

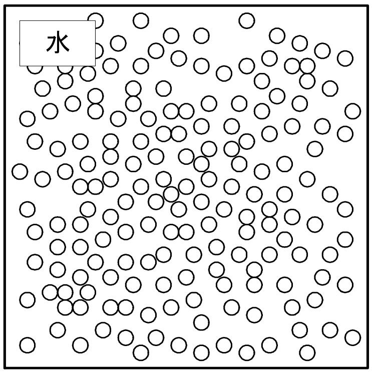
単位体積当りの質量。流体の温度や濃度などによって変化します。

水　: 998.2[kg/m^3]

空気: 1.189[kg/m^3]　　(20[℃]、1×10^5[Pa])

液体の方が気体の密度よりも大きいことがわかります。下記はイメージ。





粘度μ[Pa・s]

流体の粘り気を表しています。流体の温度や濃度によって変化します。

水　: 1,006×10^{-6}[Pa・s]

空気: 18.2×10^{-6}[Pa・s]　　(20[℃]、1×10^5[Pa])

液体の方が気体の粘度よりも大きいことがわかります。粘度は、流体粒子間の摩擦係数を表しています。大きい程、摩擦による運動量の交換が多くなります。

表面張力γ[N/m]

表面張力の大きさを表しています。流体の温度や濃度によって変化します。

水: 72.59×10^{-3}[N/m]

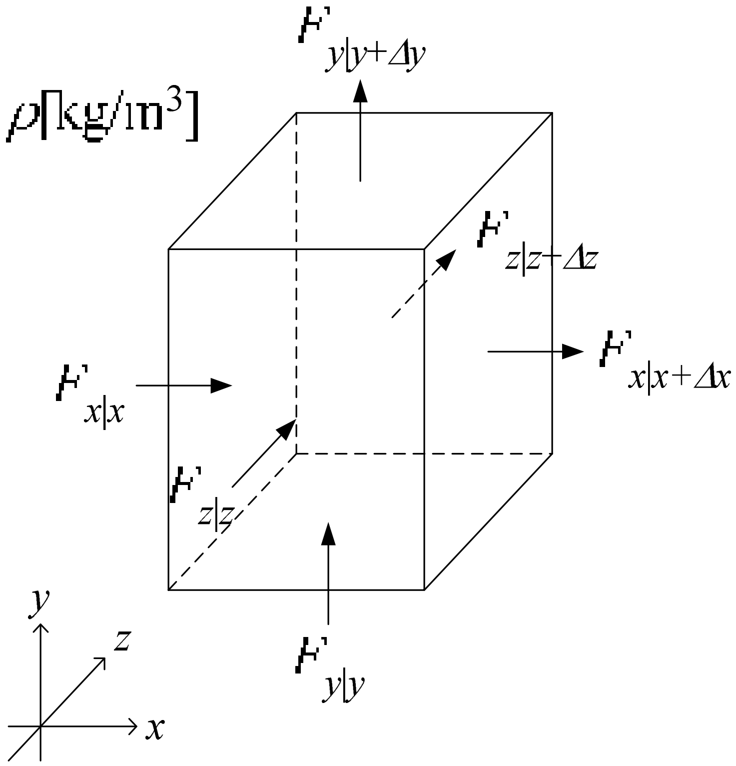
・流体使用する収支式

流体力学には基本的に 3 つの収支式があります。 収支式とは、微小領域内の物理量の釣り合いから導出された微分方程式です。

- ・質量収支式　　　質量[kg]の釣り合い式
- ・運動量収支式　　力[N]の釣り合い式。ナビエ・ストークス式と言われる。
- ・エネルギ収支式　エネルギ[J]の釣り合い式。

このうち数値計算では質量収支式と運動量収支式が扱われます。

・質量収支式
　下図の様な微小領域に流入・流出する質量の収支を取ります。



F_i[kg/s]は質量流量で次式となります。

x 軸方向

$$F_{x|x} = \rho \Delta y \Delta z v_{x|x}$$

$$F_{x|x+\Delta x} = -\rho \Delta y \Delta z v_{x|x+\Delta x}$$

y 軸方向

$$F_{y|y} = \rho \Delta z \Delta x v_{y|y}$$

$$F_{y|y+\Delta y} = -\rho \Delta z \Delta x v_{y|y+\Delta y}$$

z 軸方向

$$F_{z|z} = \rho \Delta x \Delta y v_{z|z}$$

$$F_{z|z+\Delta z} = -\rho \Delta x \Delta y v_{z|z+\Delta z}$$

収支式は、次式となります。

$$
\begin{aligned}
\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\rho_{t|t+\Delta t}-\rho_{t|t}}{\Delta t} &= F_{z|z+\Delta z}+F_{z|z} \\
&\quad +F_{y|y+\Delta y}+F_{y|y} \\
&\quad +F_{z|z+\Delta z}+F_{z|z+\Delta z} \\
&= -\rho\Delta y\Delta z v_{x|x+\Delta x}+\rho\Delta y\Delta z v_{x|x} \\
&\quad -\rho\Delta z\Delta x v_{y|y+\Delta y}+\rho\Delta z\Delta x v_{y|y} \\
&\quad -\rho\Delta x\Delta y v_{z|z+\Delta z}+\rho\Delta x\Delta y v_{z|z}
\end{aligned}
$$

両辺を$\Delta x\Delta y\Delta z$で割って、

$$
\frac{\rho_{t|t+\Delta t}-\rho_{t|t}}{\Delta t}=-\frac{\rho v_{x|x+\Delta x}-\rho v_{x|x}}{\Delta x}-\frac{\rho v_{y|y+\Delta y}-\rho v_{y|y}}{\Delta y}-\frac{\rho v_{z|z+\Delta z}-\rho v_{z|z}}{\Delta z}
$$

$\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$とすると

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}
$$

右辺を展開すると

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=-\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)
$$

ベクトル表示すると

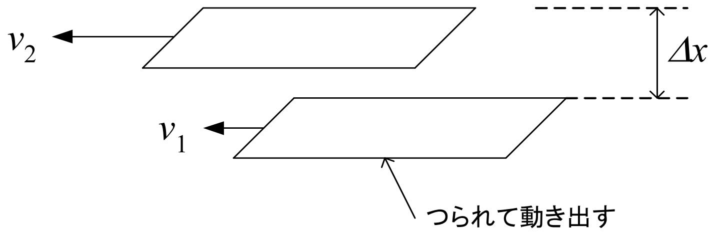
$$
\frac{D\rho}{Dt}=-\rho(\nabla\cdot\vec{v})
$$

ここで、D/Dtは全微分作用素で

$$
\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)
$$

・粘性力の簡単な説明

流体には粘性力という力が働きます。これは流体粒子間に働く摩擦力です。下図の様に粘性力によって、ある方向に流れている流体粒子の周囲の粒子がつられて同じ方向に流れ出します。



上図の場合、2 つの流体粒子間に作用している応力τ[N/m^2]は、粘度をμ[Pa・s]とすると次式となります。

$$\tau = \mu \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta x}$$

$$= \mu \frac{dv}{dx}$$

これはニュートンの粘性の法則と呼ばれます。単位面積当たりに働く粘性力を剪断応力と言います。

・力の種類

流体に働く力は、応力[N/m^2]と体積力[N/m^3]に分けられます。

応力[N/m^2]は、単位面積当りに作用する力で流体粒子の表面に作用します。

　慣性力、粘性力、圧力、表面張力　等

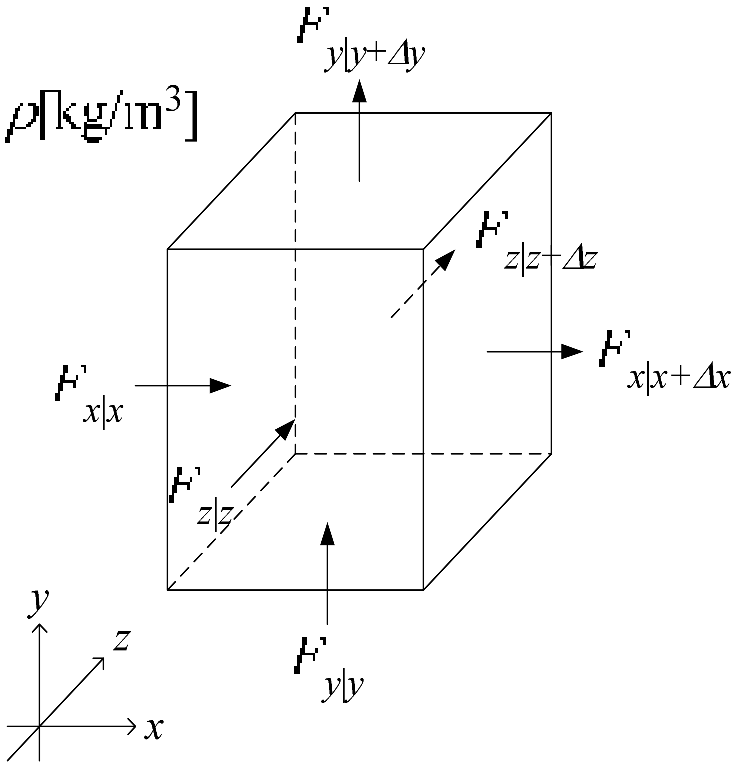
があります。

体積力[N/m^3]は、単位体積当りに作用する力で流体粒子全体に作用します。

　重力や燃焼・化学反応などによる体積膨張・発熱　等

がります。

・慣性力



x 軸方向の流入・流出による慣性力をそれぞれ $F_{|x}$[N], $F_{|x+\Delta x}$[N]、i 軸方向の質量流量を w_i, [kg/s]とすると、慣性力は下記で表されます。

$$F_{|x} = ma$$

$$= (w_x + w_y + w_z)\Delta t \frac{dv}{dt}_{|x} \qquad \text{ここで、} m = (w_x + w_y + w_z)\Delta t$$

$$= (w_x + w_y + w_z)\frac{dv}{dt}_{|x} \Delta t$$

$$= (w_x + w_y + w_z) v_{x|x} \qquad \text{ここで、} v_x = \frac{dv}{dt}_{|x} \Delta t$$

$$= \rho(\Delta y \Delta z v_x + \Delta z \Delta x v_y + \Delta x \Delta y v_z) v_{x|x}$$

ここで、

$$w_x = \rho \Delta y \Delta z v_x$$

$$w_y = \rho \Delta z \Delta x v_y$$

$$w_z = \rho \Delta x \Delta y v_z$$

これは流入した質量による押す力を現しています。

同様に、流出側の質量は、次の様になります。

$$F_{|x+\Delta x} = -\rho(\Delta y\Delta z v_x + \Delta z\Delta x v_y + \Delta x\Delta y v_z) v_{x|x+\Delta x}$$

y 軸方向の慣性力は、次の様になります。

$$F_{|y} = \rho(\Delta y\Delta z v_x + \Delta z\Delta x v_y + \Delta x\Delta y v_z) v_{y|y}$$

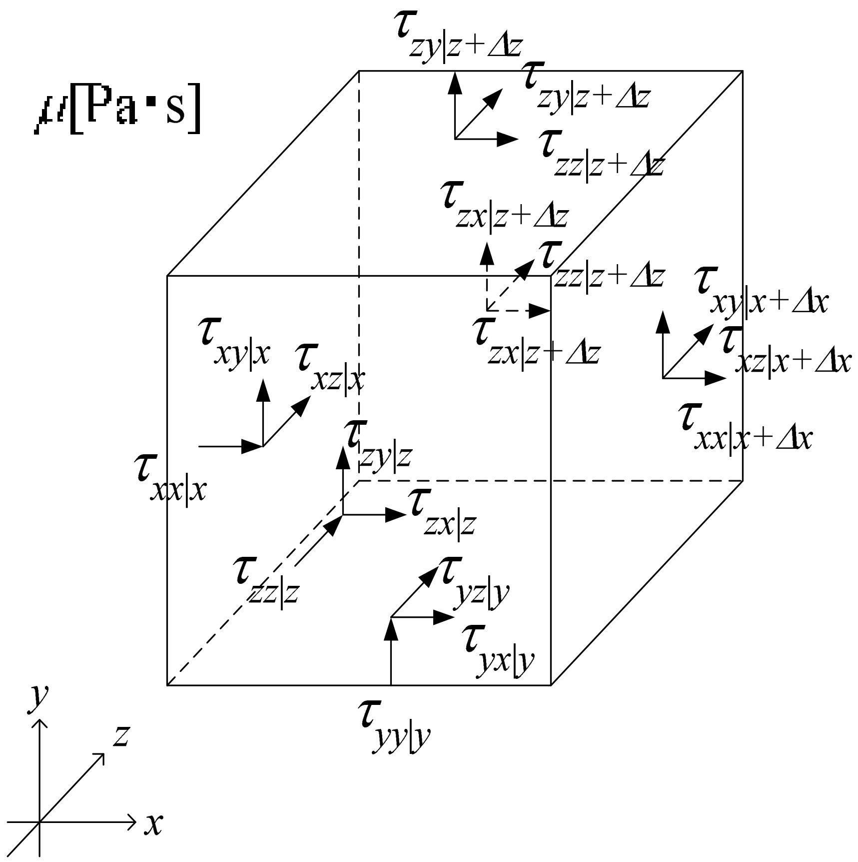
$$F_{|y+\Delta y} = -\rho(\Delta y\Delta z v_x + \Delta z\Delta x v_y + \Delta x\Delta y v_z) v_{y|y+\Delta y}$$

z 軸方向の慣性力は、次の様になります。

$$F_{|z} = \rho(\Delta y\Delta z v_x + \Delta z\Delta x v_y + \Delta x\Delta y v_z) v_{z|z}$$

$$F_{|z+\Delta z} = -\rho(\Delta y\Delta z v_x + \Delta z\Delta x v_y + \Delta x\Delta y v_z) v_{z|z+\Delta z}$$

・粘性力



剪断応力はテンソルです。つまり、x, y, z 軸に垂直な面にそれぞれ働き、各応力は x, y, z 成分に分けられます。i 軸に垂直な面に作用する剪断応力の j 成分は、τ_{ij}[N/m^2]で表されます。

x 軸方向の流入・流出による粘性力をそれぞれ $F_{|x}$[N], $F_{|x+\Delta x}$[N]とすると、次式で表されます。

$$F_{|x} = \Delta y \Delta z \tau_{xx|x} + \Delta z x \Delta z \tau_{yx|y} + \Delta x \Delta y \tau_{zx|z}$$

$$F_{|x+\Delta x} = -\Delta y \Delta z \tau_{xx|x+\Delta x} - \Delta z x \Delta z \tau_{yx|y+\Delta y} - \Delta x \Delta y \tau_{zx|z+\Delta z}$$

上式は、x, y, z 軸に垂直な面にそれぞれ作用している応力の x 成分を考慮しています。

y 成分は、次の様になります。

$$F_{|y} = \Delta y \Delta z \tau_{yx|x} + \Delta z x \Delta z \tau_{yy|y} + \Delta x \Delta y \tau_{zy|z}$$

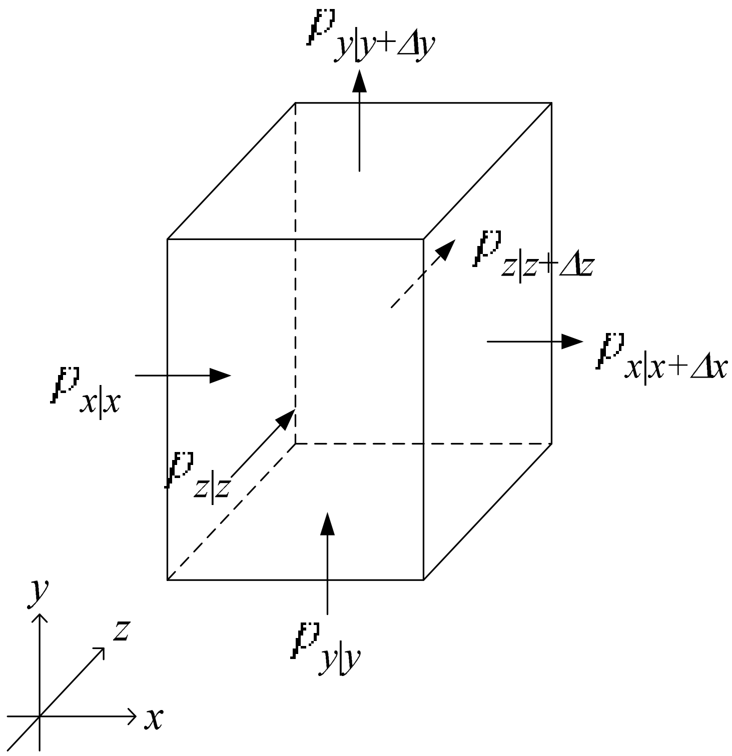
$$F_{|y+\Delta y} = -\Delta y \Delta z \tau_{xy|x+\Delta x} - \Delta z x \Delta z \tau_{yy|y+\Delta y} - \Delta x \Delta y \tau_{zy|z+\Delta z}$$

z 成分は、次の様になります。

$$F_{|z} = \Delta y \Delta z \tau_{yz|x} + \Delta z x \Delta z \tau_{yz|y} + \Delta x \Delta y \tau_{zz|z}$$

$$F_{|z+\Delta z} = -\Delta y \Delta z \tau_{xz|x+\Delta x} - \Delta z x \Delta z \tau_{yz|y+\Delta y} - \Delta x \Delta y \tau_{zz|z+\Delta z}$$

・圧力



圧力 p[N/m²]は、面に対して法線方向に働く応力です。x, y, z 軸に垂直な面にそれぞれ法線方向に作用します。x 軸方向の流入・流出による圧力をそれぞれ $F_{|x}$[N], $F_{|x+\Delta x}$[N]とすると、次の様に表されます。

$$F_{|x} = \Delta y \Delta z p_{x|x}$$

$$F_{|x+\Delta x} = -\Delta y \Delta z p_{x|x+\Delta x}$$

y 成分は、次の様になります。

$$F_{|y} = \Delta z \Delta x p_{y|y}$$

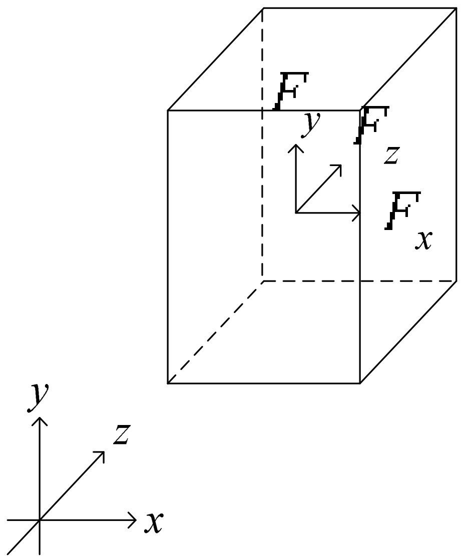
$$F_{|y+\Delta y} = -\Delta z \Delta x p_{y|y+\Delta y}$$

z 成分は、次の様になります。

$$F_{|z} = \Delta x \Delta y p_{z|z}$$

$$F_{|z+\Delta z} = -\Delta x \Delta y p_{z|z+\Delta z}$$

・重力



重力 $\vec{g}$ [m/s^2]は加速度です。

$$\vec{g} = \vec{\delta}_x g_x + \vec{\delta}_y g_y + + \vec{\delta}_z g_z$$

$$\left|\vec{g}\right| \cong 9.81[\mathrm{m/s}^2]$$

また、単位質量当たりの力を表しています。

$$[\mathrm{m/s}^2] = [\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg}}]$$

$$= [\mathrm{N/kg}]$$

x, y, z 軸方向の力 F_x[N], F_y[N], F_z[N]は、それぞれ次の様になります。

$$F_x = \rho \Delta x \Delta y \Delta z g_x$$

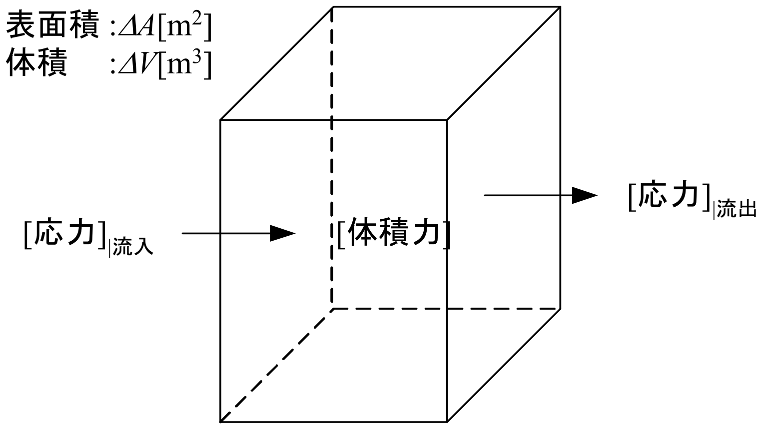
$$F_y = \rho \Delta x \Delta y \Delta z g_y$$

$$F_z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z g_z$$

これらは、体積力を表しています。

・収支式の導出

下図の様な微小領域に作用する応力、体積力の収支を取ることで、運動量収支式が導出されます。



$$\frac{[\text{蓄積した運動量}]}{\Delta t} = \Delta A \times ([\text{応力}]_{\text{流入}} - [\text{応力}]_{\text{流出}}) + \Delta V \times [\text{体積力}]$$

・運動量収支式
運動量収支式は、流体粒子に作用する力の収支を取ることで導出されます。x 成分の収支は次式となります。

$$
\begin{aligned}
\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{v_{x|t+\Delta t}-v_{x|t}}{\Delta t} &= \rho(\Delta y\Delta z v_x+\Delta z\Delta x v_y+\Delta x\Delta y v_z)v_{x|x} \\
&-\rho(\Delta y\Delta z v_x+\Delta z\Delta x v_y+\Delta x\Delta y v_z)v_{x|x+\Delta x} \\
&+\Delta y\Delta z\tau_{xx|x}-\Delta y\Delta z\tau_{xx|x+\Delta x} \\
&+\Delta z\Delta x\tau_{yx|y}-\Delta z\Delta x\tau_{yx|y+\Delta y} \\
&+\Delta x\Delta y\tau_{zx|z}-\Delta x\Delta y\tau_{zx|z+\Delta z} \\
&+\Delta y\Delta z p_{x|x}-\Delta y\Delta z p_{x|x+\Delta x} \\
&+\rho\Delta x\Delta y\Delta z g_x
\end{aligned}
$$

$\Delta x\Delta y\Delta z$ で割ると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho v_{x|t+\Delta t}-\rho v_{x|t}}{\Delta t}= \\
&-\frac{\rho v_x v_{x|x+\Delta x}-\rho v_x v_{x|x}}{\Delta x}-\frac{\rho v_y v_{x|x+\Delta x}-\rho v_y v_{x|x}}{\Delta y}-\frac{\rho v_z v_{x|x+\Delta x}-\rho v_z v_{x|x}}{\Delta z} \\
&-\frac{\tau_{xx|x+\Delta x}-\tau_{xx|x}}{\Delta x}-\frac{\tau_{yx|y+\Delta y}-\tau_{yx|y}}{\Delta y}-\frac{\tau_{zx|z+\Delta z}-\tau_{zx|z}}{\Delta z} \\
&-\frac{p_{x|x+\Delta x}-p_{x|x}}{\Delta x} \\
&+\rho g_x
\end{aligned}
$$

$\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} \\
&\quad -\frac{\partial\tau_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_y}{\partial y}-\frac{\partial\tau_z}{\partial z} \\
&\quad -\frac{\partial p_x}{\partial x}+\rho g_x
\end{aligned}
$$

質量収支式より

$$\rho(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z})=-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial p_x}{\partial x}+\rho g_x$$

と展開できる。
y, z 成分も同様に導出されます。

$$\rho(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z})=-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}-\frac{\partial p_y}{\partial y}+\rho g_y$$

$$\rho(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z})=-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}-\frac{\partial p_z}{\partial z}+\rho g_z$$

ベクトル表示は、次式で表されます。

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-[\nabla\cdot\vec{\tau}]-[\nabla\cdot\vec{p}]+\rho\vec{g}$$

ここで、全微分表示作用素

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)$$

を用いると、次式で表されます。

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-[\nabla\cdot\vec{\tau}]-[\nabla\cdot\vec{p}]+\rho\vec{g}$$

また、応力を 1 つの項で表すと次式となります。

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=[\nabla\cdot\vec{\sigma}]+\rho\vec{g}$$

ここで、$\vec{\sigma}$ [N/m^2]は応力テンソルで、

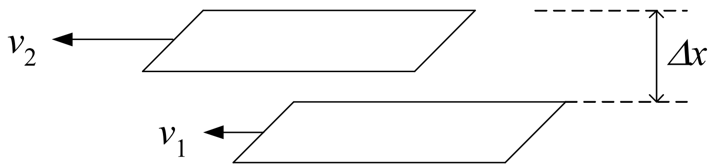
$$\sigma_{ij}=-\delta_{ij}p_j-\tau_{ij}$$

・応力の詳細

応力テンソルは、圧力と剪断応力で表されます。その成分を導出します。

・剪断速度

剪断速度を直線運動から導出します。



上図を用いて剪断速度γ[1/s]は、次式で表せます。

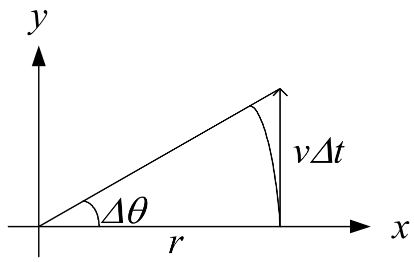
$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta x}$$

$$= \frac{dv}{dx}$$

剪断速度は、距離に対する速度勾配なので、単位は次の様に解釈できます。

$$\frac{\text{速度}[\mathrm{m/s}]}{\text{距離}[\mathrm{m}]} = [1/\mathrm{s}]$$

次に剪断速度を回転運動から導出します。この場合は角速度を用います。



面積の収支から

$$\frac{1}{2} rv\Delta t = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \pi r^2$$

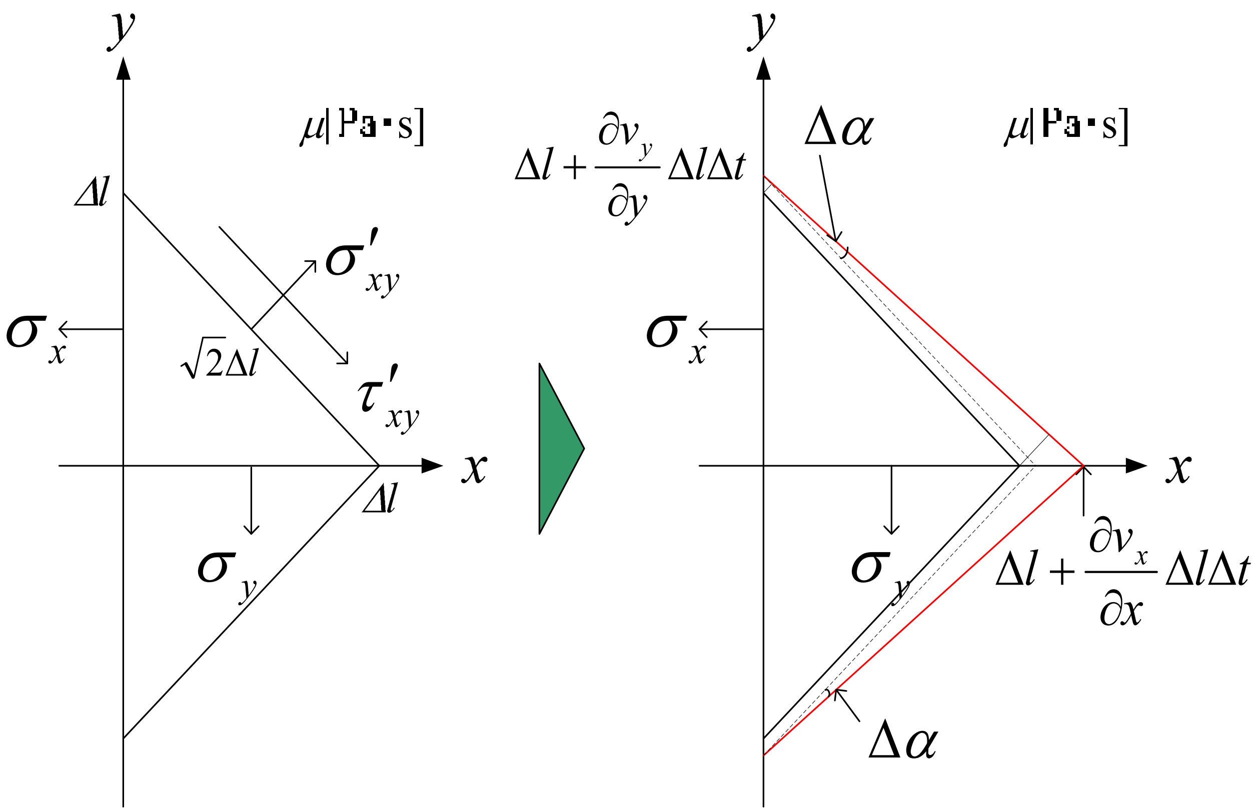
剪断速度γ[1/s]は

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{r}$$

・応力の垂直成分

応力テンソルの垂直応力成分を導出します。下図から応力の収支を考えます。



Δt 経過後の角度 $\Delta\alpha$ は次式となります。

$$\Delta\alpha \cong \sin\Delta\alpha$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta l\Delta t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta l\Delta t}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta l\Delta t + \sqrt{2}\Delta l}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{2}{\Delta t}}$$

剪断速度γ[m/s]は、次式となります。

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta\alpha}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 2 \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta t + 2}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

従って、剪断応力τ'_{xy}[N/m^2]は次式となります。

$$\tau'_{xy} = \mu\gamma$$

$$= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

また、応力の釣り合いから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta l \sigma_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta l \sigma_y - \sqrt{2}\Delta l \tau'_{xy} = 0$$

より

$$\sigma_x - \sigma_y - 2\tau'_{xy} = 0$$

従って、

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau'_{xy}$$

$$= 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

同様に

$$\sigma_y - \sigma_z = 2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_z - \sigma_x = 2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は垂直応力なので次式で表されます。

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$$

従って、

$$\sigma_x = -p_x + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$$

$$\sigma_y = -p_y + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$$

$$\sigma_z = -p_z + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$$

・圧力について

上記で述べている圧力 p_x, p_y, p_z[N/m^2]は、動力学的圧力です。熱力学的な平衡圧力 p[N/m^2]を用いて次式で表されます。

$$\frac{p_x + p_y + p_z}{3} = p - \mu'(\nabla \cdot \vec{v})$$

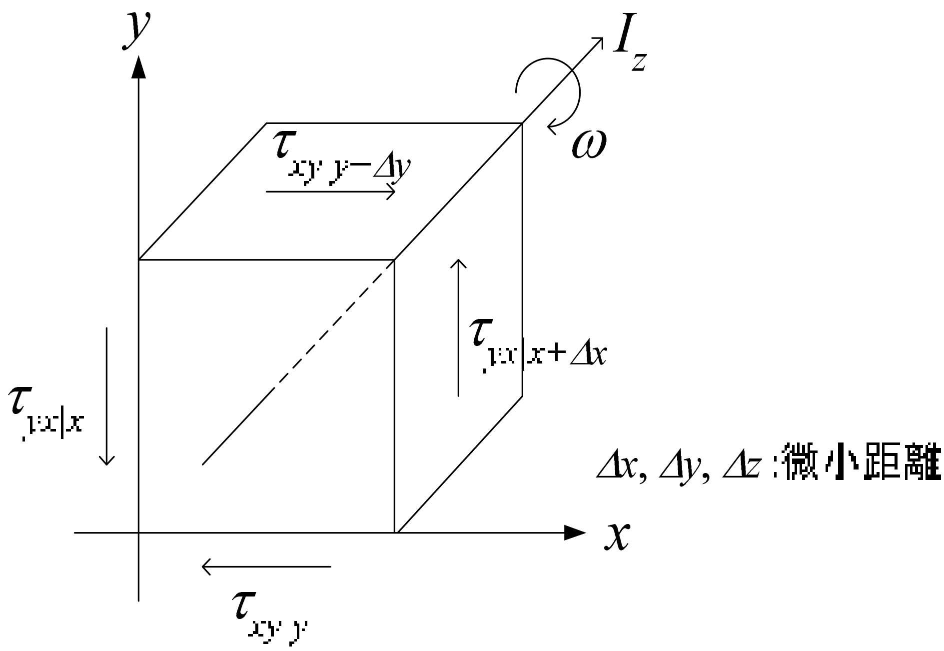
ここで、μ'[kg/m・s]は体積粘性係数です。μ'=0 として

$$p_x = p_y = p_z = p$$

とする場合もあります。

・剪断成分の対称性

応力テンソルの剪断応力成分を導出します。下図の様な回転運動からトルク[Nm]の収支を考えます。



上図の様に xy 平面の中心に慣性モーメント I_z[Nm/s]の軸を取り、角速度をω[rad/s]とします。剪断応力とのトルク[Nm]の収支は次式で与えられます。

$$(\tau_{yx|x}\Delta y\Delta z+\tau_{yx|x+\Delta x}\Delta y\Delta z)\frac{\Delta x}{2}-(\tau_{xy|y}\Delta z\Delta x+\tau_{xy|y+\Delta y}\Delta z\Delta x)\frac{\Delta y}{2}=I_z\omega$$

よって、

$$\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{2}(\tau_{yx|x}+\tau_{yx|x+\Delta x}-\tau_{xy|y}-\tau_{xy|y+\Delta y})=I_z\omega$$

ここで、慣性モーメントは、

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int \rho r^2 dV \\
&= \iiint_{\Delta V} \rho r^2 dV \\
&= \Delta z \iint_{\Delta S} \rho r^2 dS \\
&= \Delta z \iint_{\Delta S} \rho (x^2 + y^2) dS \\
&= \Delta z \int_{\Delta L} \rho [\frac{2}{3} x^3 + xy^2]_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dL \\
&= \Delta z \int_{\Delta L} \rho (\frac{1}{12} \Delta x^3 + \Delta x y^2) dL \\
&= \rho \Delta z [\frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta y + \frac{1}{12} \Delta x \Delta y^3]_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \\
&= \frac{\rho}{12} \Delta x \Delta y \Delta z (\Delta x^2 + \Delta y^2)
\end{aligned}
$$

となるので、トルクの収支式に代入すると次式となります。

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} (\tau_{yx|x} + \tau_{yx|x+\Delta x} - \tau_{xy|y} - \tau_{xy|y+\Delta y}) &= I_z \omega \\
&= \frac{\rho}{12} \Delta x \Delta y \Delta z (\Delta x^2 + \Delta y^2) \omega
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\tau_{yx|x} + \tau_{yx|x+\Delta x} - \tau_{xy|y} - \tau_{xy|y+\Delta y} = \frac{\rho}{6} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \omega
$$

$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ とすると

$$
\tau_{yx|x} + \tau_{yx|x} - \tau_{xy|y} - \tau_{xy|y} = 0
$$

従って、

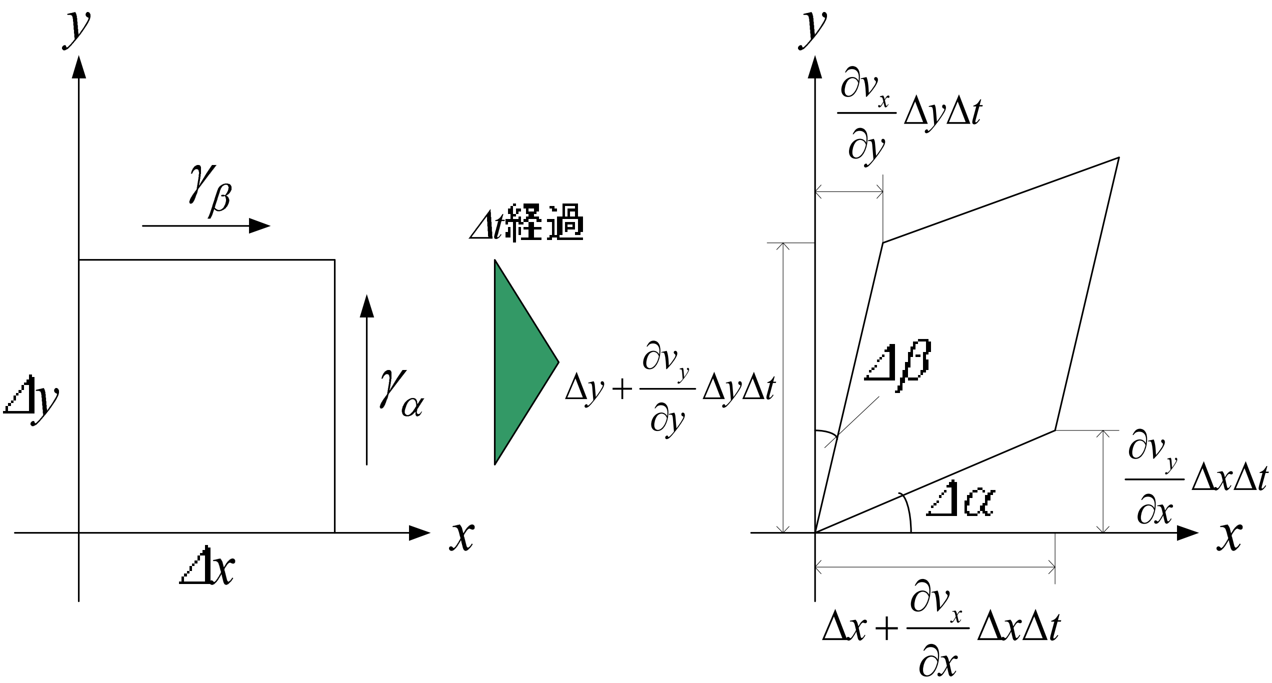
$$
\tau_{yx} = \tau_{xy}
$$

同様に

$$
\tau_{yz} = \tau_{zy}
$$

$$
\tau_{zx} = \tau_{xz}
$$

・剪断成分の値
下図より剪断速度を導出します。



$\Delta\alpha$[rad]は次式となります。

$$\Delta\alpha \cong \tan\Delta\alpha$$

$$= \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x\Delta t}{\Delta x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta t}$$

$$= \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}}{\frac{1}{\Delta t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}}$$

また、$\Delta\beta$[rad]は次式となります。

$$\Delta\beta \cong \tan\Delta\beta$$

$$= \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y\Delta t}{\Delta y + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\Delta t}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}}{\dfrac{1}{\Delta t} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}$$

従って、xy 面の剪断速度γ_z [m/s]は次式となります。

$$\gamma_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}{\dfrac{1}{\Delta t} + \dfrac{\partial v_x}{\partial x}} + \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}}{\dfrac{1}{\Delta t} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}\right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}{1 + \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta t} + \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}}{1 + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta t}\right)$$

$$= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

同様に、yz 面, zx 面の剪断速度γ_y, γ_z[m/s]は次式となります。

$$\gamma_y = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

従って、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = -\mu(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z})$$

・応力のまとめ
まとめると次の様になります。

x 軸に垂直な面に作用する剪断応力の成分

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\tau_{xy} = -\mu(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x})$$

$$\tau_{xz} = -\mu(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x})$$

y 軸に垂直な面に作用する剪断応力の成分

$$\tau_{yx} = -\mu(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\tau_{yz} = -\mu(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y})$$

z 軸に垂直な面に作用する剪断応力の成分

$$\tau_{zx} = -\mu(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z})$$

$$\tau_{zy} = -\mu(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})$$

一般的に次の様に表されます。

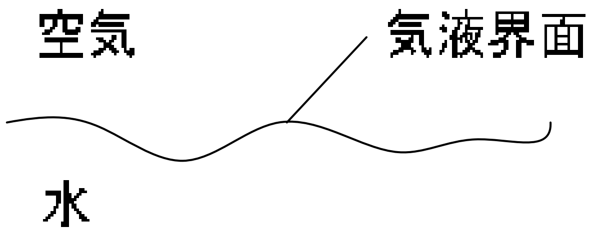
$$\tau_{ij} = -\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) + \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})$$

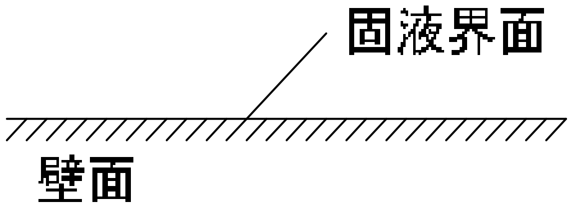
また、

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p_j - \tau_{ij}$$
$$= -\delta_{ij} p_j + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v})$$

・境界に働く力

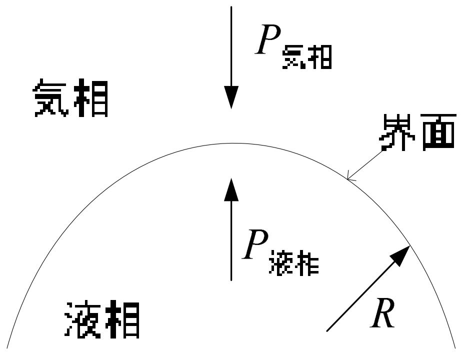
異なる層の境目の部分を境界層と言います。例えば、水と空気、水と油、水と壁面などです。これらの境界には表面張力などが作用して運動量の交換が行われます。





・表面張力

下図の様な異なる相の界面には、表面張力が作用します。この力は、気液界面に限らず、液液界面や固液界面にも作用します。

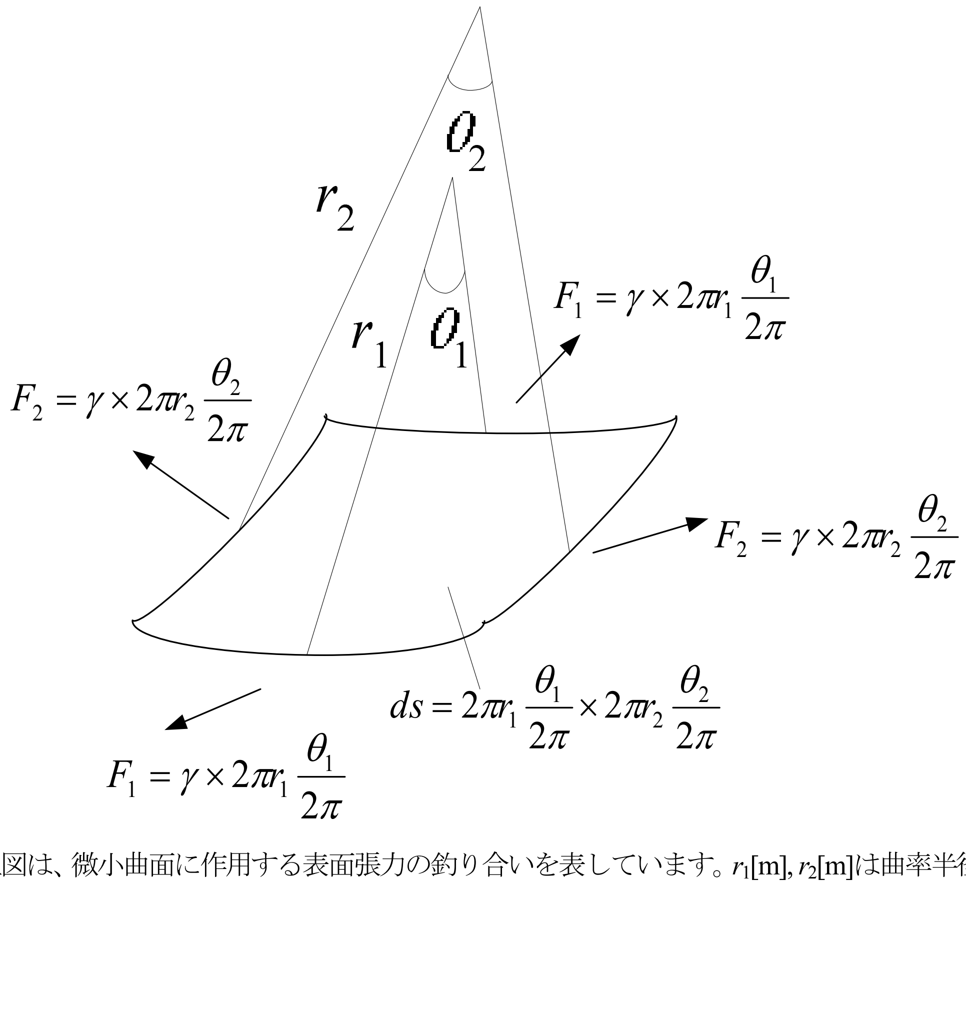


表面張力をΔp[N/m^2]、曲率半径をR[m]、表面張力係数をγ[N/m]とすると次式が成り立ちます。

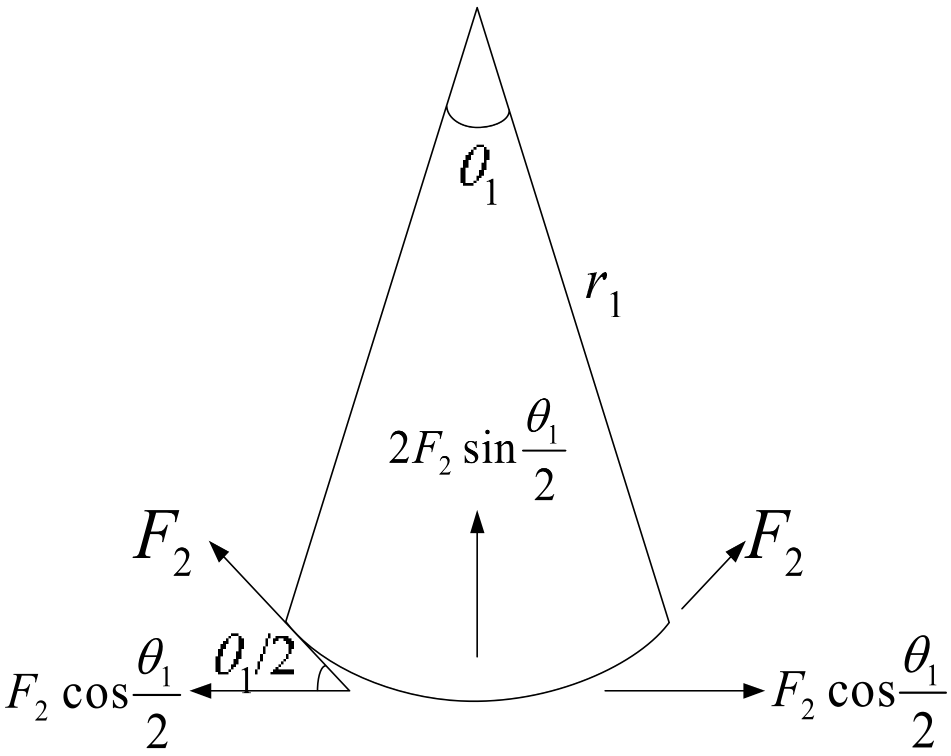
$$\Delta P = \Delta P_{gas} - \Delta P_{liquid}$$

$$= \frac{2\gamma}{R}$$

これは、ラプラス(Laplace)の式と呼ばれています。次の様に導出されます。



上図は、微小曲面に作用する表面張力の釣り合いを表しています。r_1[m], r_2[m]は曲率半径です。下図に詳細を示します。



中心方向の力をΔF_1[N/m^2]とすると

$$
\begin{aligned}
\Delta F_1 &= 2F_2\sin\frac{\theta_1}{2} \\
&= 2\gamma 2\pi r_2\frac{\theta_2}{2\pi}\sin\frac{\theta_1}{2} \\
&= 2\gamma r_2\theta_2\sin\frac{\theta_1}{2} \\
&\cong 2\gamma r_2\theta_2\frac{\theta_1}{2} \\
&= \gamma r_2\theta_2\theta_1
\end{aligned}
$$

同様に

$$\Delta F_2 = \gamma r_1\theta_1\theta_2$$

従って、表面張力による圧力差ΔP[N/m^2]は次式となります。

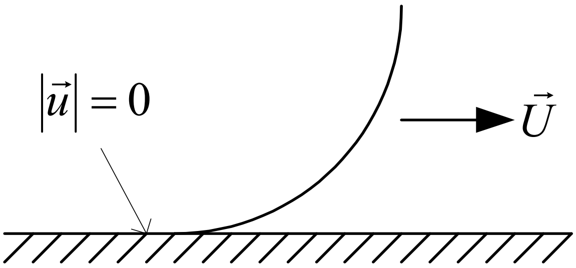
$$
\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{\Delta F_1 + \Delta F_2}{\Delta s} \\
&= \frac{\gamma r_2 \theta_2 \theta_1 + \gamma r_2 \theta_1 \theta_2}{2\pi r_1 \dfrac{\theta_1}{2\pi} \times 2\pi r_2 \dfrac{\theta_2}{2\pi}} \\
&= \frac{\gamma r_2 \theta_2 \theta_1 + \gamma r_2 \theta_1 \theta_2}{r_1 \theta_1 r_2 \theta_2} \\
&= \gamma \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}
\end{aligned}
$$

曲面が球面の場合は、次式となります。

$$
\Delta P = \frac{2\gamma}{r} \quad \because r_1 = r_2
$$

・壁面の速度

下図の様に壁面の速度は 0 になります。



・蒸発

蒸発速度$\rho w(T)$[kg/s]

・無次元数

無次元数は、ある系に作用する力[N]の釣り合いを示しています。**系の現象は、力の大きさではなく、力の釣り合いで決まります。**例えば、系１と系２の無次元数が等しい場合、系の大きさや作用する力が異なっても同じ現象が現れます。系に作用する力を次式で表します。

$$
\begin{aligned}
F_{慣性力} &= ma & &[\mathrm{kg}][\mathrm{m/s^2}] \\
&= w_x \Delta t \frac{dv}{dt} & &[\mathrm{kg/s}][\mathrm{s}][\mathrm{m/s^2}] \\
&= \rho x^2 v \Delta t \frac{dv}{dt} & & \\
&= \rho x^2 v \frac{dv}{dt} \Delta t & & \\
&= \rho x^2 v^2 & &[\mathrm{N}](=[\mathrm{kg/m^3}][\mathrm{m^2}][\mathrm{m^2/s^2}])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{粘性力} &= \mu \frac{\partial v}{\partial x} \times A & &[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}\mathrm{s}]\frac{[\mathrm{m/s}]}{[\mathrm{m}]}[\mathrm{m^2}] \\
&= \mu \frac{v}{x} x^2 & &[\mathrm{N/m^2}][\mathrm{m^2}] \\
&= \mu v x & &[\mathrm{N}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{表面張力/2} &= \frac{\gamma}{R} \times A & &\frac{[\mathrm{N/m}]}{[\mathrm{m}]}[\mathrm{m^2}] \\
&= \frac{\gamma}{x} x^2 & &\frac{[\mathrm{N/m}]}{[\mathrm{m}]}[\mathrm{m^2}] \\
&= \gamma x & &[\mathrm{N}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{重力} &= mg & &[\mathrm{kg}][\mathrm{m/s^2}] \\
&= \rho V g & &[\mathrm{kg/m^3}][\mathrm{m^3}][\mathrm{m/s^2}] \\
&= \rho x^3 g & &[\mathrm{N}](=[\mathrm{kg/m^3}][\mathrm{m^3}][\mathrm{m/s^2}])
\end{aligned}
$$

ここで、x[m]は代表長さ、v[m/s]は代表速度です。

これらの力の釣り合いを示す無次元数は次式となります。

レイノルズ数
慣性力と粘性力の釣り合いを示す無次元数。

$$\mathrm{Re} = \frac{F_{慣性力}}{F_{粘性力}}$$

$$= \frac{\rho x^2 v^2}{\mu v x}$$

$$= \frac{\rho x v}{\mu}$$

ウェーバー数
慣性力と表面張力の釣り合いを表す無次元数。

$$We = \frac{F_{慣性力}}{F_{表面張力/2}}$$

$$= \frac{\rho x^2 v^2}{\gamma x}$$

$$= \frac{\rho x v^2}{\gamma}$$

オーネソルジュ数
粘性力、表面張力、慣性力の釣り合いを表す無次元数

$$Oh = \frac{F_{\text{粘性力}}}{\sqrt{F_{\text{表面張力}/2} F_{\text{慣性力}}}}$$

$$= \frac{\mu v x}{\sqrt{\gamma x \rho x^2 v^2}}$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\gamma x \rho}}$$

オーネソルジュ数には、代表速度が含まれていません。数値解析で初速が 0 の場合に使用されることがあります。

ボンド数
重力、表面張力の釣り合いを表す無次元数

$$
\begin{aligned}
Bo &= \frac{F_{\text{重力}}}{F_{\text{表面張力}/2}} \\
&= \frac{\rho x^3 g}{\gamma x} \\
&= \frac{\rho x^2 g}{\gamma}
\end{aligned}
$$

フルード数
慣性力、重力の釣り合いを表す無次元数

$$
\begin{aligned}
Fr &= \sqrt{\frac{F_{\text{慣性力}}}{F_{\text{重力}}}} \\
&= \sqrt{\frac{\rho x^2 v^2}{\rho x^3 g}} \\
&= \sqrt{\frac{v^2}{xg}} \\
&= \frac{v}{\sqrt{xg}}
\end{aligned}
$$

次に、音速との比に関する無次元数を示します。
　マッハ数

$$Ma = \frac{v}{c}$$

ここで、c[m/s]は流体の音速です。これは、圧縮性流体を扱う場合に使用します。
上記の無次元数以外にも熱収支式、物質収支式などで使用される無次元数があります。

・無次元化

無次元化とは、収支式に使用されている変数の次元を無次元[-]にする操作です。**無次元化することで収支式の定数は無次元数のみとなります。**逆に言えば、ある無次元数で計算された結果は、その無次元数の変数をどのようにとっても変わりません。速度や長さ、密度などが異なっても無次元数が等しければ同じ現象が現れます。変数は次式で無次元化されます。ここで、x_0[m]は代表長さ、v_0[m/s]は代表速度です。

座標の無次元化

$$X = \frac{x}{x_0}, Y = \frac{y}{x_0}, Z = \frac{z}{x_0}$$

速度の無次元化

$$V_x = \frac{v_x}{v_0}, V_y = \frac{v_y}{v_0}, V_z = \frac{v_z}{v_0}$$

圧力の無次元化

$$P = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

時間の無次元化

$$\tau = \frac{v_0}{x_0} t$$

・質量収支式の無次元化

無次元化前

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z})$$

音速式より

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

なので

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ここで、c[m/s]は音速です。上式と無次元変数を代入して、

$$\frac{\partial(P\rho v_0^2)}{\partial(\tau x_0/v_0)}+V_x v_0\frac{\partial(P\rho v_0^2)}{\partial(Xx_0)}+V_y v_0\frac{\partial(P\rho v_0^2)}{\partial(Yx_0)}+V_z v_0\frac{\partial(P\rho v_0^2)}{\partial(Zx_0)}$$

$$=-c^2\rho\{\frac{\partial(V_x v_0)}{\partial(Xx_0)}-\frac{\partial(V_y v_0)}{\partial(Yx_0)}-\frac{\partial(V_z v_0)}{\partial(Zx_0)}\}$$

定数を微分の外に出します。

$$\frac{\rho v_0^3}{x_0}\frac{\partial P}{\partial\tau}+\frac{\rho v_0^3}{x_0}V_x\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\rho v_0^3}{x_0}V_y\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{\rho v_0^3}{x_0}V_z\frac{\partial P}{\partial Z}$$

$$=-c^2\rho\frac{v_0}{x_0}(\frac{\partial V_x}{\partial X}+\frac{\partial V_y}{\partial Y}+\frac{\partial V_z}{\partial Z})$$

$(\rho v_0^3/x_0)$で割ると

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}+V_x\frac{\partial P}{\partial X}+V_y\frac{\partial P}{\partial Y}+V_z\frac{\partial P}{\partial Z}=\frac{c^2}{v_0^2}(\frac{\partial V_x}{\partial X}+\frac{\partial V_y}{\partial Y}+\frac{\partial V_z}{\partial Z})=0$$

無次元数を代入して

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}+V_x\frac{\partial P}{\partial X}+V_y\frac{\partial P}{\partial Y}+V_z\frac{\partial P}{\partial Z}=-\frac{1}{Ma^2}(\frac{\partial V_x}{\partial X}+\frac{\partial V_y}{\partial Y}+\frac{\partial V_z}{\partial Z})$$

$$\frac{DP}{D\tau} = -\frac{1}{Ma^2}(\nabla \cdot \vec{V})$$

ここで、

$$Ma = \frac{v_0}{c}$$

・運動量収支式の無次元化

無次元化前

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = [\nabla \cdot \vec{\sigma}] + \rho \vec{g}$$

ここで、$\vec{\sigma}$ [N/m^2]は応力テンソルで、

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -\delta_{ij} p_j - \tau_{ij} \\ &= -\delta_{ij} p_j + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

無次元化後

$$\frac{D\vec{V}}{D\tau} = [\nabla \cdot \vec{\sigma}^*] + \frac{1}{Fr^2} \vec{r}$$

ここで、$\vec{\sigma}^*$ は応力テンソルで、

$$\begin{aligned}\sigma^*_{ij} &= -\delta_{ij} P_j - \tau^*_{ij} \\ &= -\delta_{ij} P_j + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i}\right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{1}{\mathrm{Re}} (\nabla \cdot \vec{V})\end{aligned}$$

また、

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{x_0 g}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\, x_0 v_0}{\mu}$$

・代表速度、代表長さの取り方

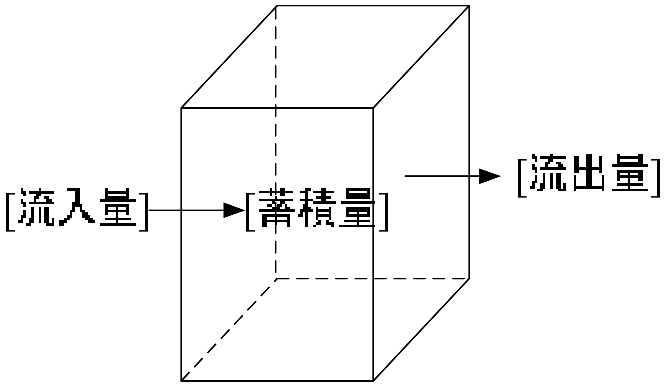
ある現象を解析する場合を考えます。その際、代表速度、代表長さの取り方により無次元数は異なるため、数値解析の結果も異なります。しかし、どの解析結果でも速度、時間、距離を有次元に戻せば同じ現象を表していることがわかります。

無次元数をどう取るかに関わらず、解析結果は有次元化すれば同じ現象を表しています。これは、全ての現象は同じ現象であることを示しています。しかし、極端な無次元数を選択すると数値解析を行う際、タイムステップごとの収束が悪くなったり、途中で計算が破綻しやすくなることが考えられます。

・同じ現象は異なる無次元数で表されます。
・ある無次元数は様々な現象を表します。

・グリーン・ガウスの定理

グリーン・ガウスの定理とは、簡易的に言えば体積分を面積分に換える定理です。



上図から

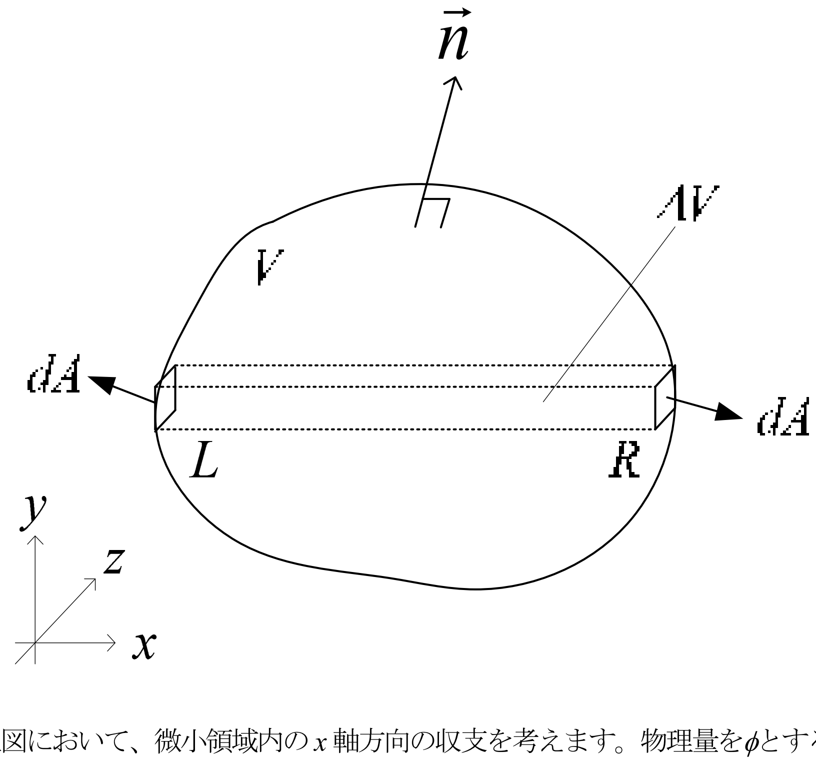
領域内の変化量　＝　表面からの流入・流出量

であり、

体積分：領域内の変化量

面積分：表面からの流入・流出量

という考えに基づいています。



上図において、微小領域内の x 軸方向の収支を考えます。物理量をϕとすると

$$\iiint_{\Delta V}\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdydz=\iint(\phi dydz)_R-\iint(\phi dydz)_L$$

ここで、法線ベクトルは

$$\vec{n}=\vec{\delta}_x n_x+\vec{\delta}_y n_y+\vec{\delta}_z n_z$$

であり、微小面積は

L 面： $dA = -n_x dydz$

R 面： $dA = +n_x dydz$

であるので、

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdydz = \iint (\phi dydz)_R - \iint (\phi dydz)_L$$

$$= \iint \{\phi(+n_x dA)\}_R - \iint \{\phi(-n_x dA)\}_L$$

$$= \iint (\phi n_x dA)_R + \iint (\phi n_x dA)_L$$

領域全体を積分すると

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdydz = \iint_R \phi n_x dA + \iint_L \phi n_x dA$$

$$= \oiint_S \phi n_x dA$$

同様に

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial y} dV = \oiint_S \phi n_y dA$$

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial z} dV = \oiint_S \phi n_z dA$$

ベクトル表示すると

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \oiint_S \phi \vec{n} dA$$

有限要素法で使用する形式

$\phi = uv$ の場合、

$$\iiint_V \frac{\partial (uv)}{\partial x_i} dV = \oiint_S (uv) n_i dA$$

となるので、

$$\iiint_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV + \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x_i} v dV = \oiint_S uv n_i dA$$

移項して、

$$\iiint_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV = \oiint_S uv n_i dA - \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x_i} v dV$$

この形式は、有限要素法で収支式の離散化に使用されます。