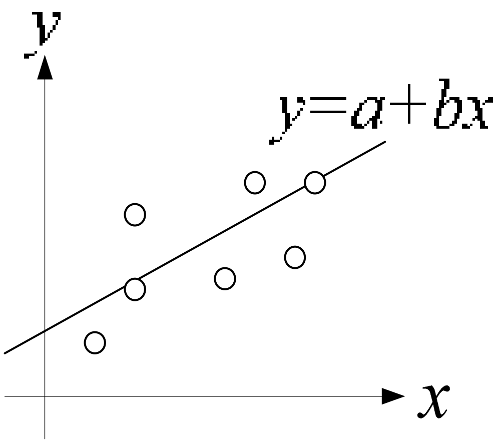
・メッシュ関係

流体を解析する際、有限要素法ではメッシュの作成が必要になります。メッシュとは解析領域を 3 角形や 4 面体の集合として表した領域です。節点配置の粗密などで領域内部の要素形状は変わってきます。できるだけ滑らかに節点を配置する必要があります。メッシュを作成する方法としてデローニ分割などがあります。

・最小二乗法



点の座標と直線の距離の総和は、次式となります。

$$\chi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-f(x_i)\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(a+bx_i)\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{(a+bx_i-y_i)a+(a+bx_i-y_i)bx_i-(a+bx_i-y_i)y_i\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a^2+x_iab-y_ia+x_iab+x_i^2b^2-x_iy_ib-y_ia-x_iy_ib+y_i^2)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a^2+2x_iab+x_i^2b^2-2y_ia-2x_iy_ib+y_i^2)$$
$$=na^2+2ab\sum_{i=1}^{n}x_i+b^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2a\sum_{i=1}^{n}y_i-2b\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

この誤差は、

$$\frac{\partial\chi(a,b)}{\partial a}=0$$
$$\frac{\partial\chi(a,b)}{\partial b}=0$$

の場合に最小になります。

従って、

$$\frac{\partial \chi(a,b)}{\partial a} = 2na + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$= 0$$

また、

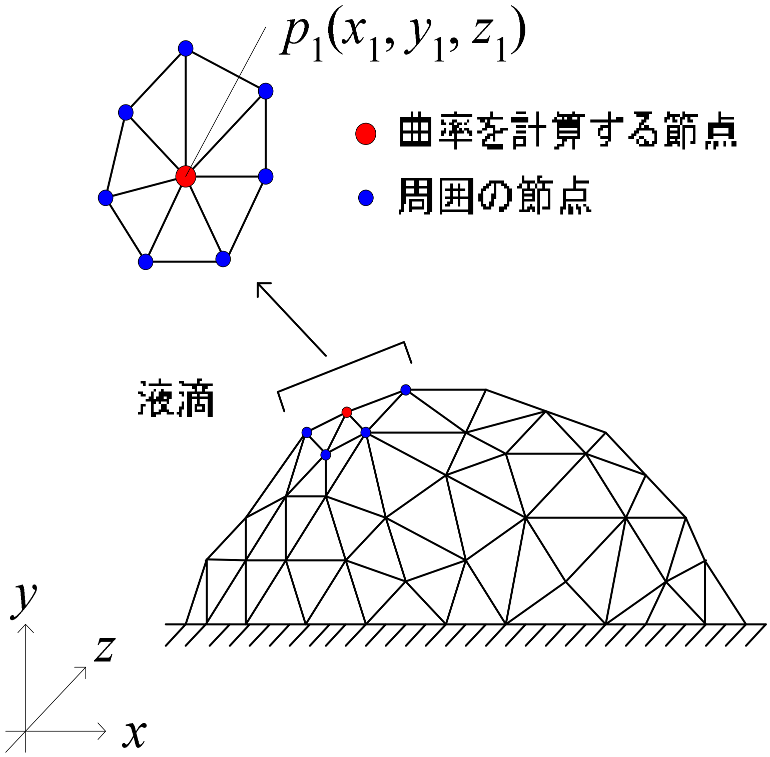
$$\frac{\partial \chi(a,b)}{\partial b} = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$= 0$$

まとめると

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \end{cases}$$

これを解くと係数 a, b が求まります。

・曲率計算



近似する関数を次式で与えます。

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2-r^2=0$$

とします。中心の節点 p_1 を通るので、

$$r^2=(x_1-x_c)^2+(y_1-y_c)^2+(z_1-z_c)^2$$
$$=r_0^2$$

最小二乗法より誤差を計算すると

$$\chi(x_c,y_c,z_c)=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2+(z_i-z_c)^2-r_0^2\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2-(x_1-x_c)^2-(y_1-y_c)^2-(z_1-z_c)^2\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{2(x_1-x)x_c+2(y_1-y)y_c+2(z_1-z)z_c+x^2-x_1^2+y^2-y_1^2+z^2-z_1^2\}^2$$
$$=0$$

変数で微分して

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial x_c}\right|_{y_c,z_c} = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(x_1-x_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array}$$
$$=0$$

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial y_c}\right|_{z_c,x_c} = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(y_1-y_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array}$$
$$=0$$

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial z_c}\right|_{x_c,y_c} = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(z_1-z_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array}$$
$$=0$$

従って、

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(x_1-x_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(y_1-y_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \begin{array}{l} 4(z_1-z_i)\{2(x_1-x_i)x_c+2(y_1-y_i)y_c+2(z_1-z_i)z_c \\ +x_i^2-x_1^2+y_i^2-y_1^2+z_i^2-z_1^2\} \end{array} = 0 \end{cases}$$

より

$$
\begin{cases}
x_c \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_i)(x_1 - x_i) + y_c \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_i)(y_1 - y_i) + z_c \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_i)(z_1 - z_i) \\
= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_i) \{ x_i^2 - x_1^2 + y_i^2 - y_1^2 + z_i^2 - z_1^2 \} \\
\\
x_c \sum_{i=1}^{n} (y_1 - y_i)(x_1 - x_i) + y_c \sum_{i=1}^{n} (y_1 - y_i)(y_1 - y_i) + z_c \sum_{i=1}^{n} (y_1 - y_i)(z_1 - z_i) \\
= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_1 - y_i) \{ x_i^2 - x_1^2 + y_i^2 - y_1^2 + z_i^2 - z_1^2 \} \\
\\
x_c \sum_{i=1}^{n} (z_1 - z_i)(x_1 - x_i) + y_c \sum_{i=1}^{n} (z_1 - z_i)(y_1 - y_i) + z_c \sum_{i=1}^{n} (z_1 - z_i)(z_1 - z_i) \\
= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (z_1 - z_i) \{ x_i^2 - x_1^2 + y_i^2 - y_1^2 + z_i^2 - z_1^2 \}
\end{cases}
$$

これを解くと変数 x_c, y_c, z_cが求まるので曲率が計算できます。
また、法線ベクトルは次式となります。

$$\vec{n} = \vec{\delta}_x n_x + \vec{\delta}_y n_y + \vec{\delta}_z n_z$$

$$n_x = \frac{x_1 - x_c}{r_0}$$

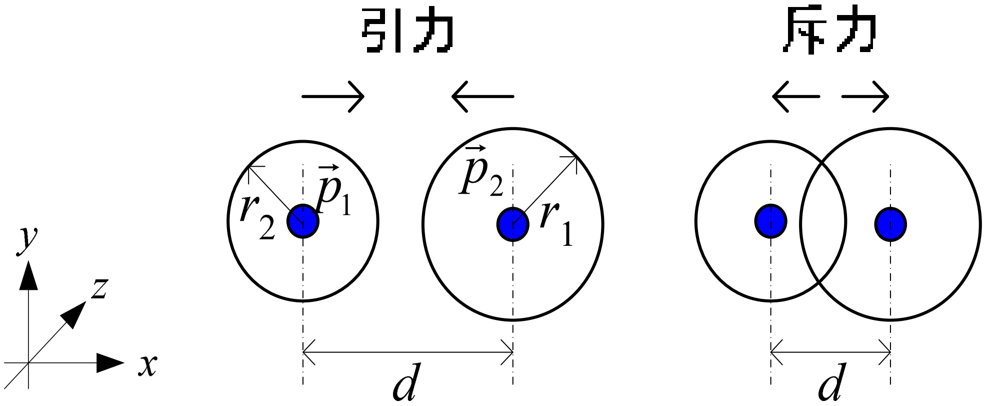
$$n_y = \frac{y_1 - y_c}{r_0}$$

$$n_z = \frac{z_1 - z_c}{r_0}$$

$$r_0 = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + (z_1 - z_c)^2}$$

節点の配置__バブルメッシュ法

解析の精度を上げるためには、できるだけ節点を滑らかに配置する必要があります。また、メッシュ作成もスムーズに行うことができます。ここでは、次のような方法で節点を配置してみます。

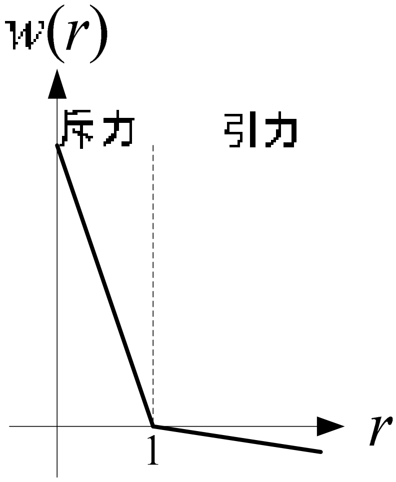


上図の様に直交座標上に 2 つの節点があるとします。それぞれ位置ベクトルは $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$、半径を r1,r2 とします。この時、2 つの節点に働く力は次式となります。

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\
&= w\left(\frac{\left|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\right|}{r_2 + r_1}\right)\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\left|\vec{p}_2 - \vec{p}_2\right|}
\end{aligned}
$$

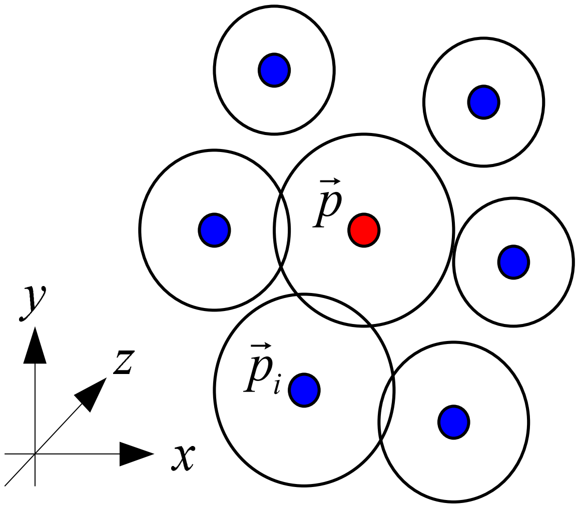
ここで、w は重み関数であり、この式は重み関数と方向ベクトルの積を表しています。

ここで、図 1 では斥力、図 2 では引力が節点間に働いています。これは、次式の重み関数で表されます。



W<1 の場合は、斥力、w＞1 の場合は引力が働きます。

次に下図の様に周囲に複数の節点がある場合を考えます。



この場合は、節点に働く力は次式となります。

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} w\left(\frac{|\vec{p}-\vec{p}_i|}{r+r_i}\right)\frac{\vec{p}-\vec{p}_i}{|\vec{p}-\vec{p}_i|}$$

従って、タイムステップごとの節点の方向ベクトルは次式としました。

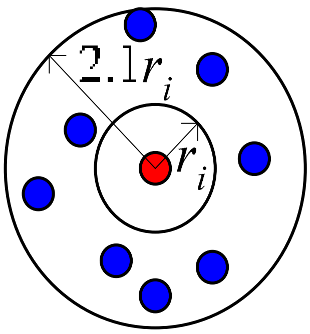
$$\vec{r} = cr\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

$$= cr\frac{1}{|\vec{F}|}\sum_{i=1}^{n} w\left(\frac{|\vec{p}-\vec{p}_i|}{r+r_i}\right)\frac{\vec{p}-\vec{p}_i}{|\vec{p}-\vec{p}_i|}$$

ここで、c は緩和係数です。

節点の追加・削除

滑らかな節点を配置するためには、節点を追加・削除する必要があります。



上図の様に節点ごとに周囲の節点の粗密を考えます。

ここで、節点の数密度は n(ri)です。

2 次元の場合、節点の追加・削除の条件は次式としました。

節点削除 : $n(r_i) > 8$

節点追加 : $n(r_i) < 5$

節点半径の補正
節点の半径は、次式の様に距離の加重平均で補正しました。

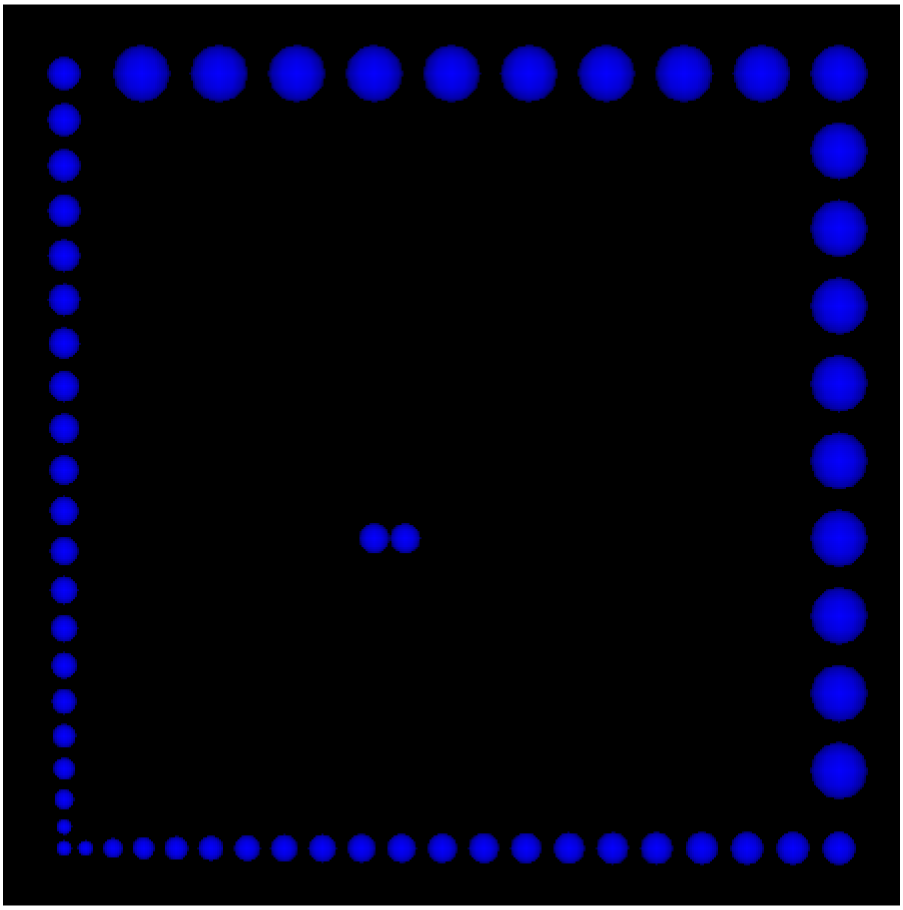
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(|\vec{p} - \vec{p}_i|) r_i}{\sum_{i=1}^{n} w(|\vec{p} - \vec{p}_i|)}$$

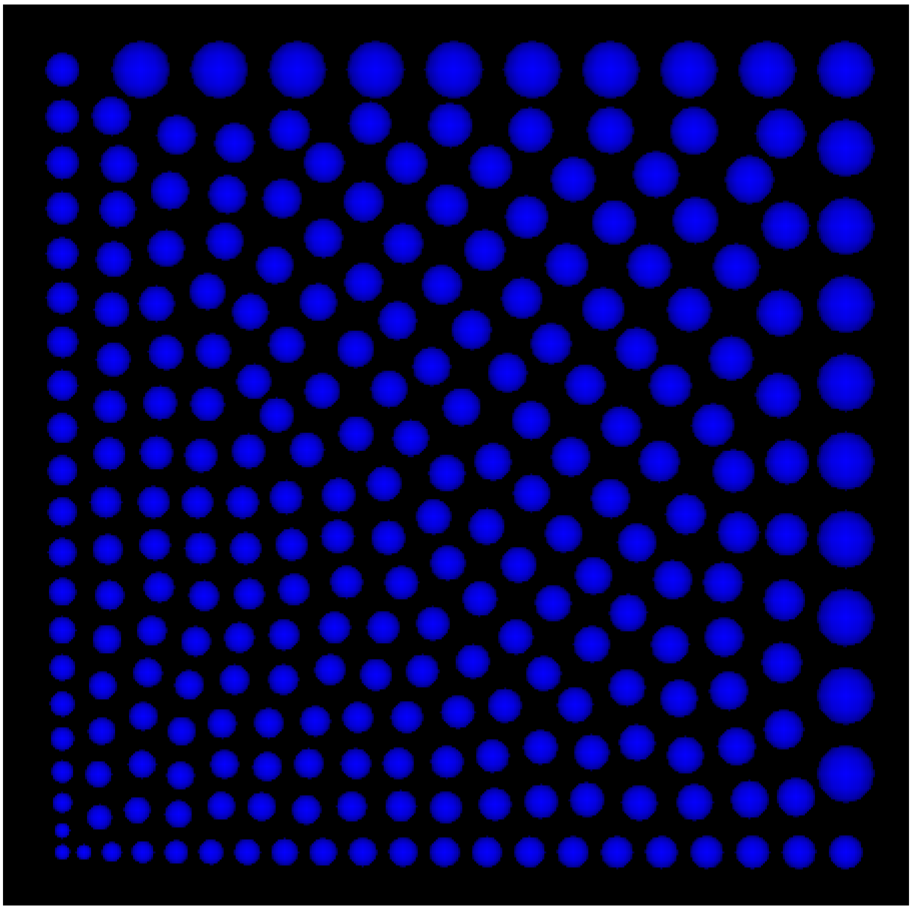
ここで、w は重み関数で次式としました。

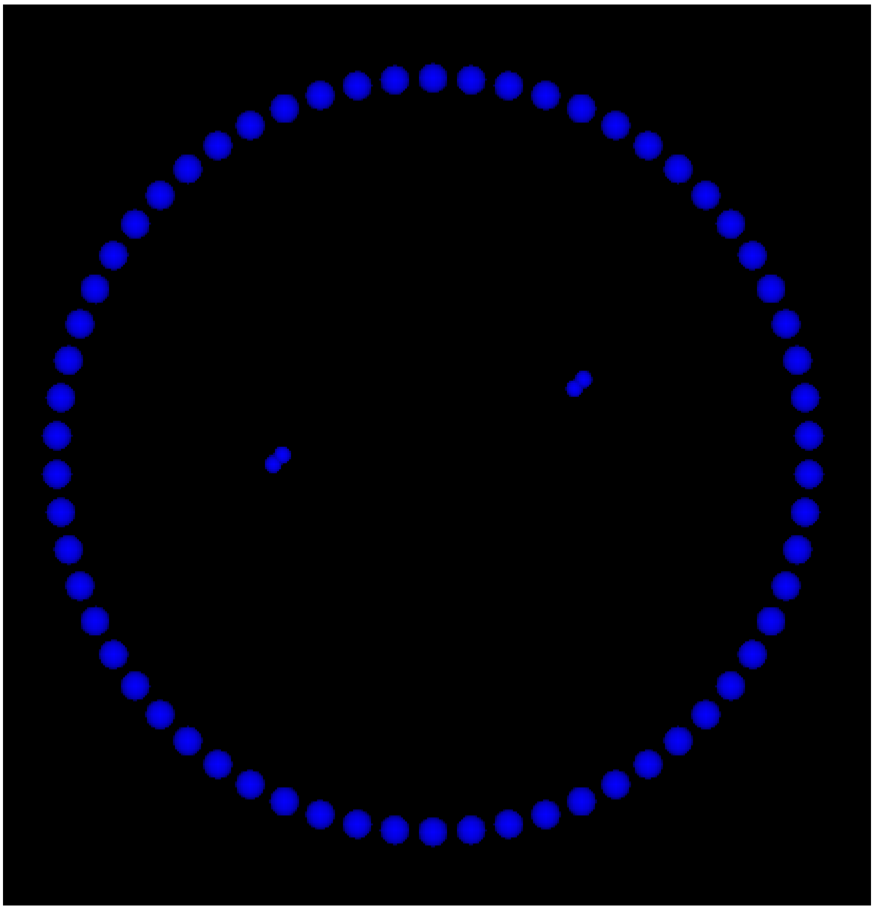
$$w(d) = \frac{1}{d + 10^{-3}}$$

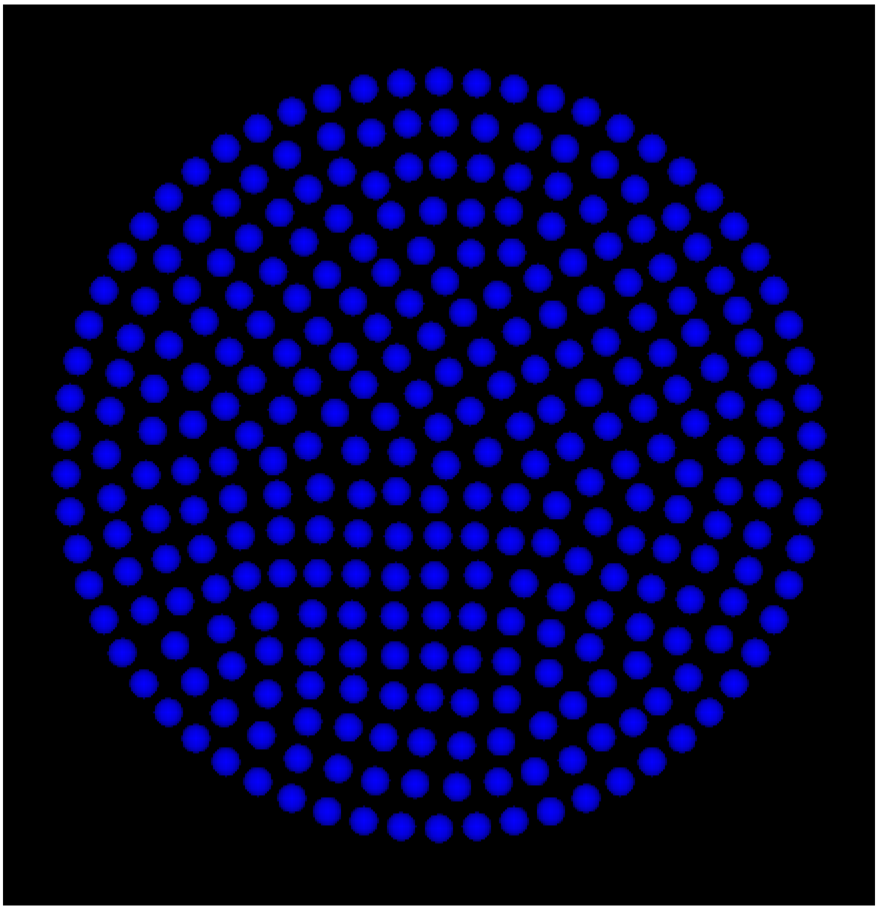
補正はタイムステップごとに行いました。

結果
2 次元の場合、下図の様な結果になりました。





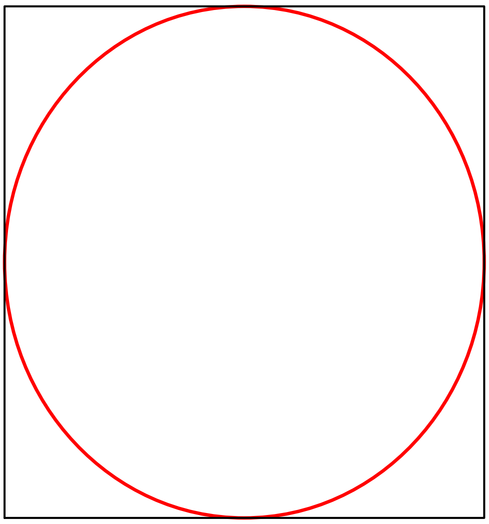




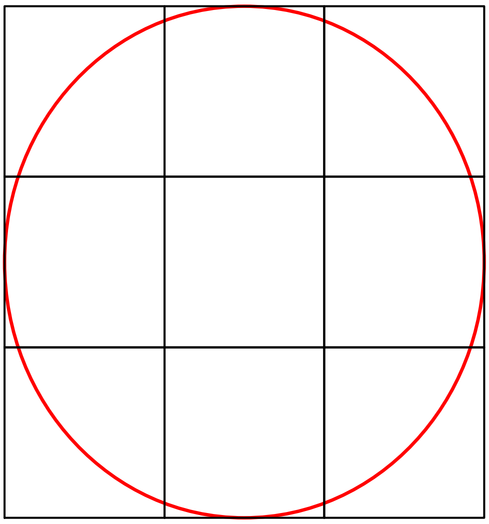
・節点の配置＿8 分木

　解析の精度を上げるためには、できるだけ節点を滑らかに配置する必要があります。また、メッシュ作成もスムーズに行うことができます。ここでは、8 分木について書きます。8 分木は下図の様なステップで節点が配置されます。

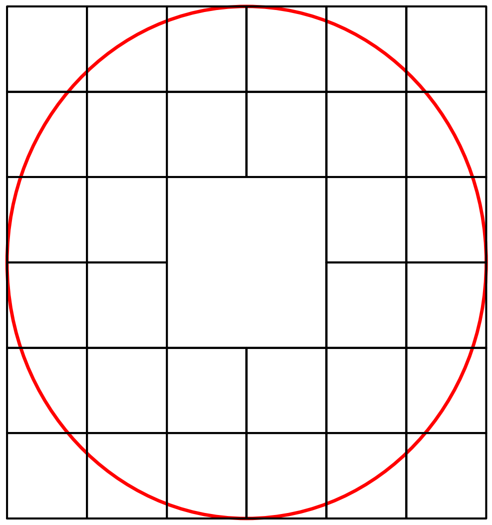
ステップ 1



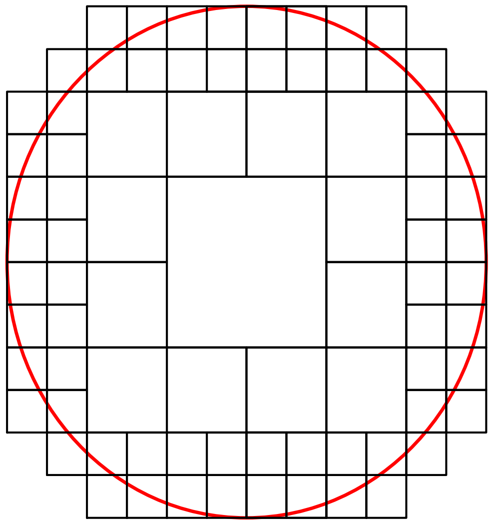
ステップ 2



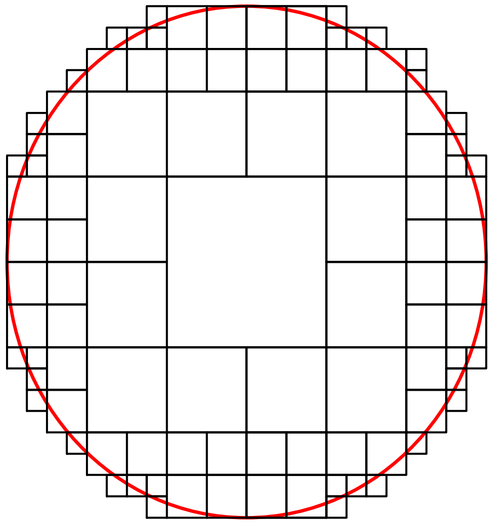
ステップ 3



ステップ 4



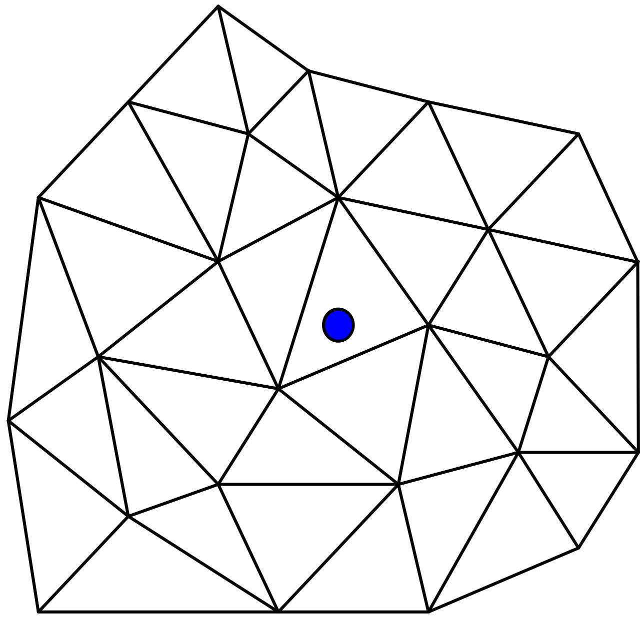
ステップ 5



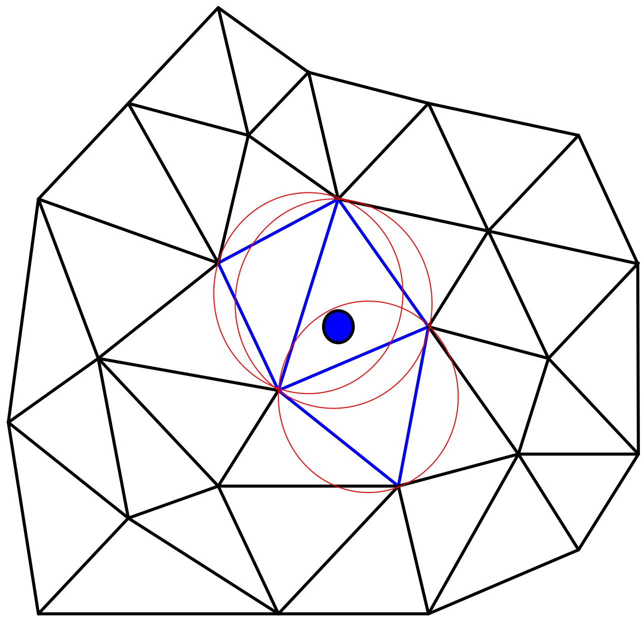
・デローニ分割

デローニ分割(delaunay method)は、メッシュを作成する方法の１つです。節点を１つずつ領域に追加することでメッシュが作成されていきます。ここでは３角形要素を用いて領域に節点を追加してメッシュが作成されるプロセスを示してみます。

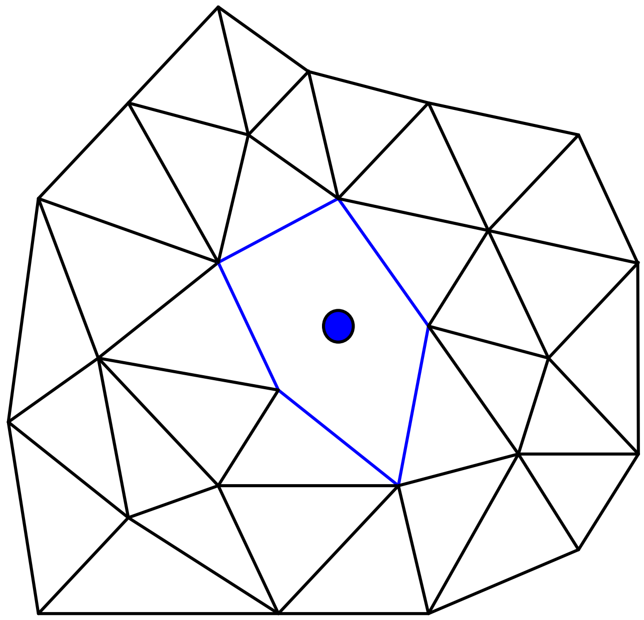
下図の様に領域に節点を１つ追加します。



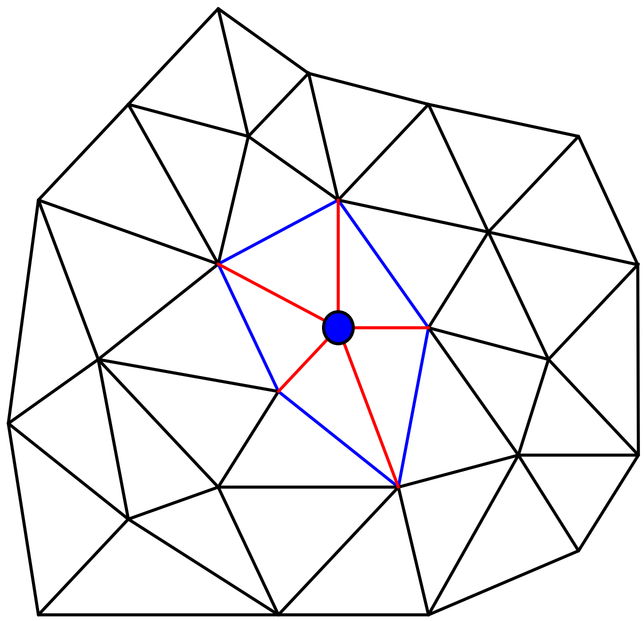
次に各要素の外接円を描いて、追加した節点が外接円に含まれる要素を探します。



外接円に節点を含む要素で作られる多角形が出来上がります。



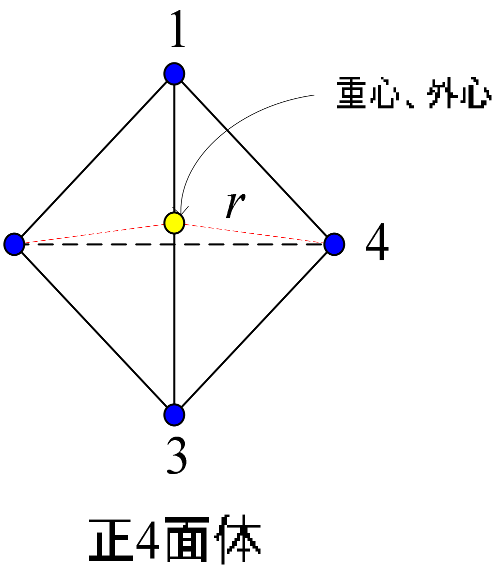
この多角形の各頂点と節点を直線で結ぶと新たな要素が出来上がります。

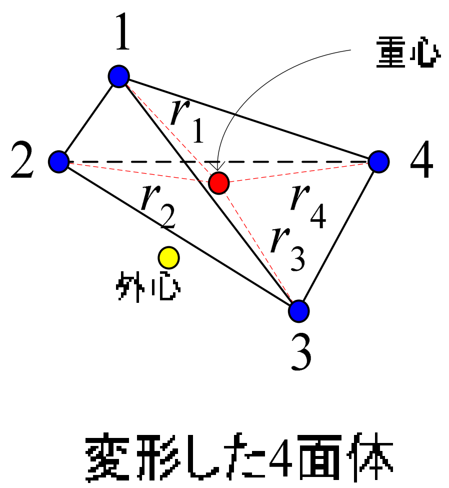


4 面体要素を用いる場合は、節点を外接球に含む要素を探すことになります。

・要素の変形

ラグラジアン座標の場合は、要素が変形します。
そのまま変形が進むと計算が破綻したりするので、メッシュの再作成が必要となります。
その目安を要素の変形度として次の様に計算してみます。





上図の様に正 4 面体の場合は、重心と外心の座標が等しいが、変形するとそれらの位置はずれます。
この重心と外心のずれから要素の変形度を計算します。
つまり本来、外心と等しい要素の重心から各節点までの距離を計算します。
外心を使用するのは、外心が外接球の中心で各節点までの距離が等しいからです。

まず、要素の重心の位置は次式となります。

$$x_g = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$y_g = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i$$

$$z_g = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} z_i$$

正 4 面体の重心から各節点までの距離を r とします。r は未知数です。
また、変形した 4 面体の重心から各節点までの距離を次式とします。

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_g)^2 + (y_i - y_g)^2 + (z_i - z_g)^2}$$

ここで、各節点から重心までの距離のずれを dr とすると次式となります。

$$
\begin{aligned}
dr^2 &= \sum_{i=1}^{4}(r_i - r)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(r^2 - 2r_i r + r_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{4} r^2 - \sum_{i=1}^{4} 2r_i r + \sum_{i=1}^{4} r_i^2 \\
&= 4r^2 - 2\sum_{i=1}^{4} r_i r + \sum_{i=1}^{4} r_i^2 \\
&= 4r^2 - 2ar + b \\
&= 4(r^2 - \frac{1}{2}ar + \frac{b}{4}) \\
&= 4\{(r^2 - \frac{1}{2}ar + \frac{1}{16}a^2) - \frac{1}{16}a^2 + \frac{b}{4}\} \\
&= 4\{(r - \frac{1}{4}a)^2 - \frac{1}{16}a^2 + \frac{b}{4}\} \\
&= 4\{(r - \frac{1}{4}a)^2 - \frac{1}{16}a^2 + \frac{b}{4}\} \\
&= 4(r - \frac{1}{4}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + b
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
a = \sum_{i=1}^{4} r_i
$$

$$
b = \sum_{i=1}^{4} r_i^2
$$

このずれは、次の場合に最小となります。

$$
dr_{\min}^2 = b - (\frac{a}{2})^2 \qquad at\ r_{\min} = \frac{a}{4}
$$

従って、規格化したこのずれを変形度とすると次式となります。

$$
\begin{aligned}
dR_{\min}^2 &= \frac{dr_{\min}^2}{r_{\min}^2} \\
&= \frac{b-(a/2)^2}{(a/4)^2} \\
&= \frac{16b-4a^2}{a^2} \\
&= (\frac{2}{a})^2(4b-a^2)
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
dR_{\min} &= \frac{2}{a}\sqrt{4b-a^2} \\
&= \frac{2}{\sum_{i=1}^{4} r_i}\sqrt{4\sum_{i=1}^{4} r_i^2 - (\sum_{i=1}^{4} r_i)^2}
\end{aligned}
$$

この変形度は、要素が正 4 面体の場合 0 になります。
経験的に 0.5～0.7 がメッシュ再作成の目安になりました。