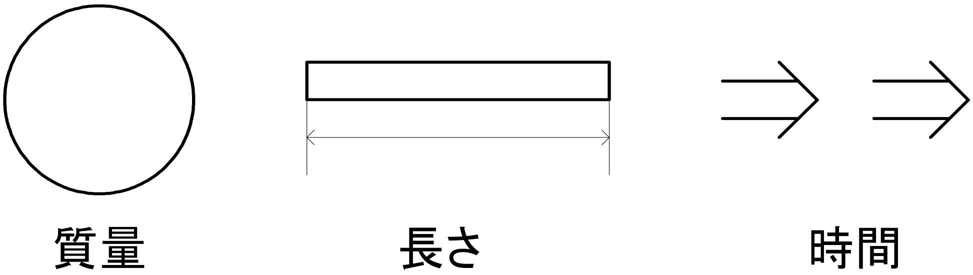
・物理
　流体力学で使用する単位や、物理量、作用素について説明します。高校で習う程度からやや難しい記述も含まれます。難しい表現も基本の組み合わせであることがわかれば、理解しやすいかもしれません。流体力学では、主に直交座標が用いられ、ベクトルでの表現が基本になります。

・単位
流体力学では、SI 単位が使用されます。使用する単位は次の 3 つです。



単位	記号	読み
質量	[kg]	キログラム
距離、長さ	[m]	メートル
時間(秒数)	[s]	セカンド

力学的な物理量は、これらの 3 つの物理量で定義されます。

・物理量
流体力学で使用する物理量の定義を行います。

・速度 v[m/s]
単位時間当たりに進む距離。また、時間と距離の変換。時間を t[s]、移動距離を l[m]とすると次式で定義されます。

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l_{t+\Delta t} - l_t}{\Delta t}$$
$$= \frac{dl}{dt}$$

・加速度 a[m/s^2]
時間に対する速度勾配

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t}$$
$$= \frac{dv}{dt}$$

重力も加速度です。

$a \neq 0$ ：時間に対して速度が変化している。

$a = 0$ ：速度は変わらない。

・力 F[N]
質量 m[kg]の時間に対する速度勾配。

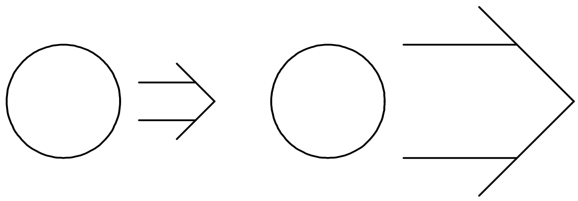
$$F = ma$$
$$= m\frac{dv}{dt}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{mv_{t+\Delta t} - mv_t}{\Delta t}$$

単位には、ニュートン[N]が使用され、次式で定義されます。
[N] = [kg m/s^2]

次の様にも表現できます。

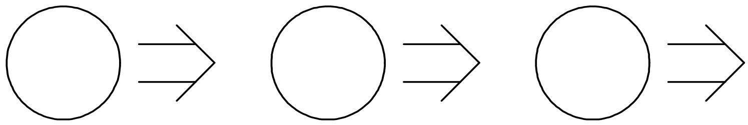
力が大きい

より短時間でより大きく速度が変わる。高速で物がぶつかった場合など。



力が加わらない

速度が変わらない。同じ速度で動き続ける。

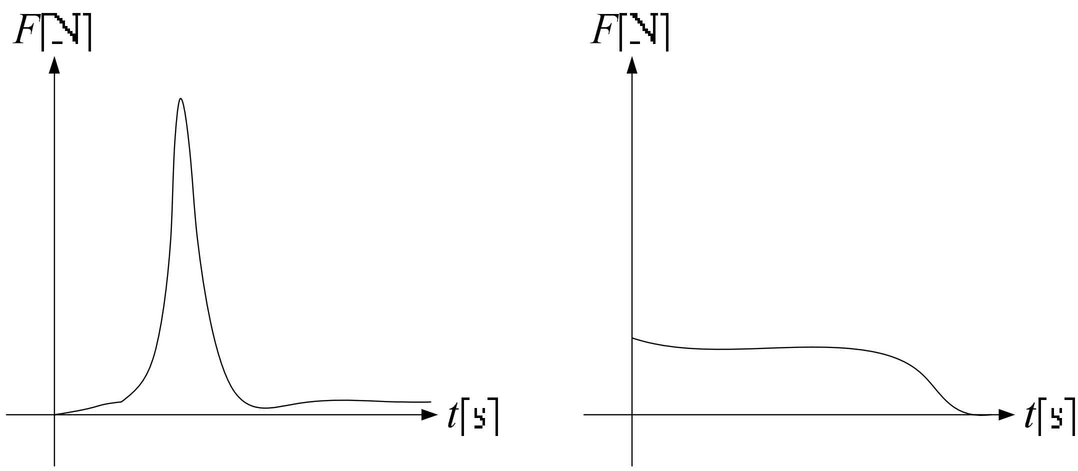


・運動量 mv[kg m/s]

加えた力 F[N]の総量。力積とも言います。簡易的に言うと何秒間、力を加え続けたか。

$$\int F dt = \int m \frac{dv}{dt} dt$$
$$= m \int dv$$
$$= m(v_f - v_i)[\mathrm{kgm/s}]$$

上式から大きな力 F[N]が短時間加わった場合の運動量と、小さな力 F[N]が長時間加わった場合の運動量は等しいことがわかります。



次の様にも表現できます。

運動量が大きい→より大きな質量 m[kg]の速度 v[m/s]が、より大きく変化した。

・エネルギーE[J]
加えた力F[N]の総量。簡易的に言うと何メートル力を加え続けたか。

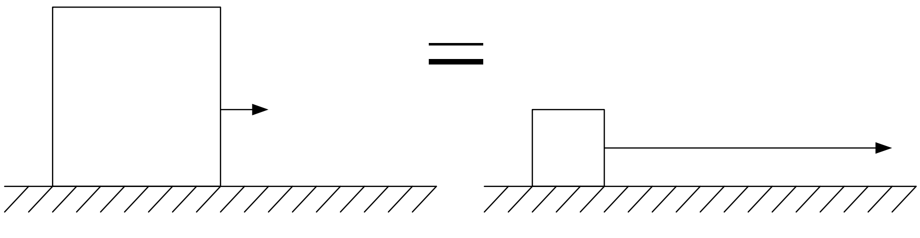
$$
\begin{aligned}
\int F dl &= \int F \frac{dl}{dt} dt \\
&= \int F v dt \\
&= \int m \frac{dv}{dt} \frac{dl}{dt} dt \\
&= \int m \frac{dl}{dt} dv \\
&= \int m v dv \\
&= \frac{1}{2} m v^2
\end{aligned}
$$

上式から大きな力F[N]が短い距離加わった場合のエネルギーと、小さな力F[N]が長距離加わった場合のエネルギーは等しいことがわかります。

単位には、ジュール[J]が使用され、次式で定義されます。

[J] = [N m] = [kg m^2/s^2]

エネルギーE[J]を速度v[m/s]で微分すると運動量mv[kg m/s]になります。これは、速度v[m/s]を距離l[m]と時間t[s]の変換と解釈する理解できます。



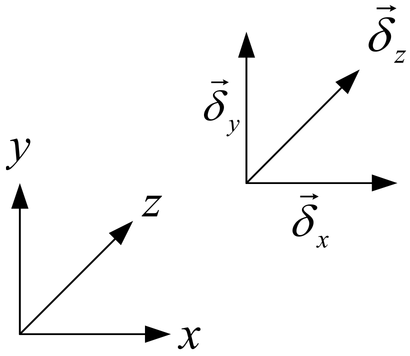
・角速度ω[rad/s]
・慣性モーメントI_z[Nm/s]
・トルクN[Nm]

・ベクトル計算

・単位ベクトル

単位ベクトルを定義します。ベクトル量は、単位ベクトルとその係数で表現されます。

x, y, z 軸方向の長さ 1 のベクトル。



$\vec{\delta}_x$:x 軸方向の単位ベクトル。

$\vec{\delta}_y$:y 軸方向の単位ベクトル。

$\vec{\delta}_z$:z 軸方向の単位ベクトル。

また、

$$\left|\vec{\delta}_x\right| = \left|\vec{\delta}_y\right| = \left|\vec{\delta}_z\right| = 1$$

$$\vec{v} = \vec{\delta}_x p + \vec{\delta}_y q + \vec{\delta}_z r$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

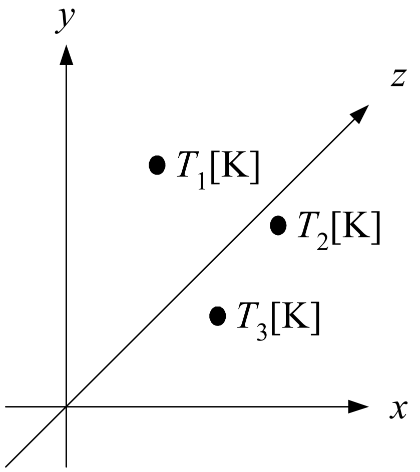
・物理量の分類

物理量は次の 3 つに分類されます。

・オーダー0 の物理量

スカラー量。方向を持たない。

例：温度 T[K]、濃度 C[mol/m^3]



・オーダー1 の物理量

ベクトル量。方向がある。

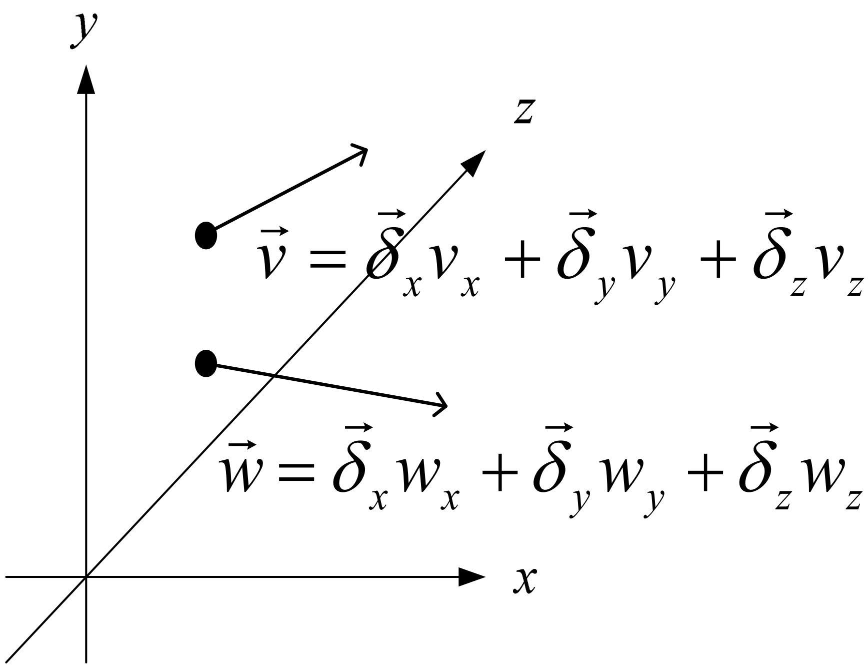
例：方向ベクトル$\vec{r}$ [m]、速度$\vec{v}$ [m/s]

$$\vec{v} = \sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i v_i$$

$$= \vec{\delta}_x v_x + \vec{\delta}_y v_i + \vec{\delta}_z v_z$$

大きさは絶対値で表されます。

$$\left| \vec{v} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



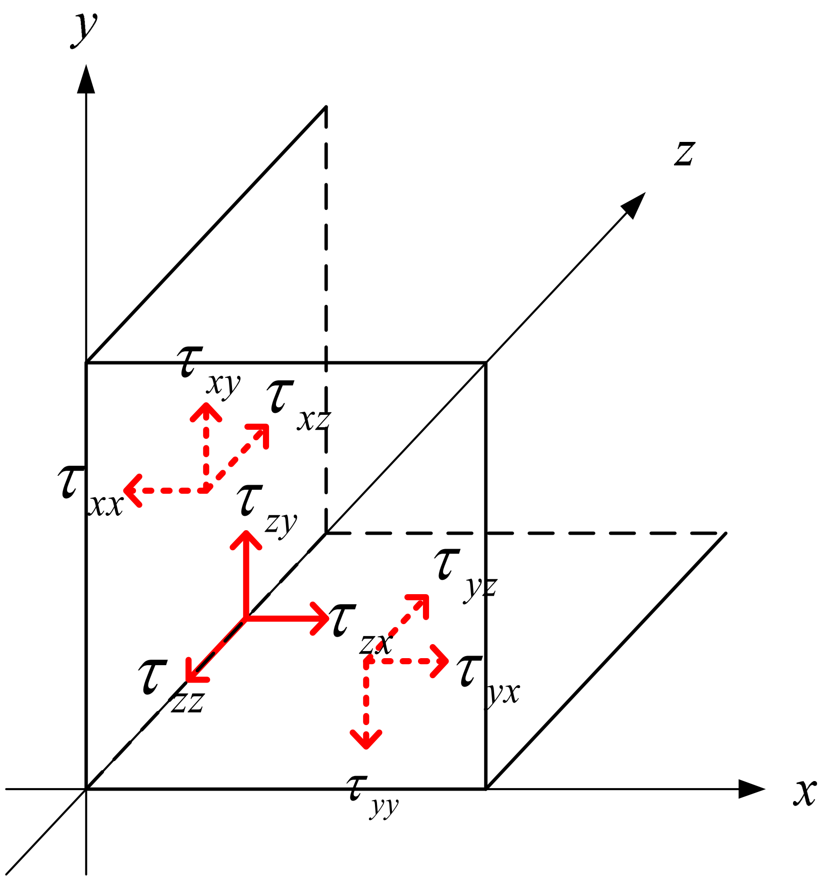
・オーダー2 の物理量

テンソル量。方向と面の向きがあります。方向 i に垂直な面の j 方向の成分を表現します。

x, y, z 面にそれぞれ働く摩擦力の x, y, z 成分等を表現できます。

例：剪断応力 $\vec{\tau}$ [N/m^2]

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i (\vec{\delta}_x \tau_{ix} + \vec{\delta}_y \tau_{iy} + \vec{\delta}_z \tau_{iz}) \\
&= \vec{\delta}_x \vec{\delta}_x \tau_{xx} + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_y \tau_{xy} + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_z \tau_{xz} \\
&\quad + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_x \tau_{yx} + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_y \tau_{yy} + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_z \tau_{yz} \\
&\quad + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_x \tau_{zx} + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_y \tau_{zy} + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_z \tau_{zz}
\end{aligned}
$$



オーダーの違う物理量の加算、減算はできません。例えば、温度+速度などの計算はできません。分類することで物理量を正確に表現できます。

・作用素の種類

・オーダー0 の作用素

オーダー0 の作用素にはラプラシアン作用素Δがあります。

$$\Delta = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ラプラシアンは 2 回微分の作用素です。

・オーダー1 の作用素

オーダー1 の作用素には微分作用素∇ がります。

$$\nabla = \sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \vec{\delta}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\delta}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\delta}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

・計算の種類

　計算には次の種類があり、それぞれオーダーがあります。

種類	オーダー
四則演算	0
内積	-2
外積	-1

流体力学では、物理量の内積、外積が使用され、それぞれ物理的な意味があります。
物理量、作用素、計算はそれぞれオーダーを持ち、項のオーダーはそれらの足し算で決まります。
例えば、ベクトルとベクトルの内積は(1-2+1)=(0)となるので、その項はスカラー量となります。
スカラー量、ベクトル量、テンソル量は、それぞれ次の様に表されます。

スカラー量	( )
ベクトル量	[ ]
テンソル量	{ }

・オーダー0 の計算
オーダー0 の作用素には加算、減算、乗算などがあります。

・加算、乗算
ベクトルの計算

$$
\begin{aligned}
\vec{v} + s\vec{w} &= \sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i v_i + s\sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i w_i \\
&= \sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i v_i + \sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i s w_i \\
&= \sum_{i=3}^{3} \vec{\delta}_i (v_i + s w_i) \\
&= \vec{\delta}_x (v_x + s w_x) + \vec{\delta}_y (v_y + s w_y) + \vec{\delta}_z (v_z + s w_z)
\end{aligned}
$$

テンソルの計算

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} + s\vec{\sigma} &= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij} + s\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij} + \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j s\sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j (\tau_{ij} + s\sigma_{ij}) \\
&= \vec{\delta}_x \vec{\delta}_x (\tau_{xx} + s\sigma_{xx}) + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_y (\tau_{xy} + s\sigma_{xy}) + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_z (\tau_{xz} + s\sigma_{xz}) \\
&\quad + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_x (\tau_{yx} + s\sigma_{yx}) + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_y (\tau_{yy} + s\sigma_{yy}) + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_z (\tau_{yz} + s\sigma_{yz}) \\
&\quad + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_x (\tau_{zx} + s\sigma_{zx}) + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_y (\tau_{zy} + s\sigma_{zy}) + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_z (\tau_{zz} + s\sigma_{zz})
\end{aligned}
$$

減算も同様に計算できます。

・微分作用素を含む場合

スカラーの微分

$$
\begin{aligned}
\nabla s &= \sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} s \\
&= \sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \\
&= \vec{\delta}_x \frac{\partial s}{\partial x} + \vec{\delta}_y \frac{\partial s}{\partial y} + \vec{\delta}_z \frac{\partial s}{\partial z}
\end{aligned}
$$

ベクトルの微分

$$
\begin{aligned}
\nabla \vec{v} &= \sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_j v_j \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\delta}_j v_j \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial (\vec{\delta}_j v_j)}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
&= \vec{\delta}_x \vec{\delta}_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + \vec{\delta}_x \vec{\delta}_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\
&\quad + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \vec{\delta}_y \vec{\delta}_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \\
&\quad + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + \vec{\delta}_z \vec{\delta}_z \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

ベクトルのラプラシアン

$$\Delta\vec{v} = \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j v_j$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\vec{\delta}_j v_j$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}$$

$$= \sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2}\right)$$

$$= \vec{\delta}_x\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$+\vec{\delta}_y\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$+\vec{\delta}_z\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

・オーダー-2 の計算
オーダー-2 の計算には内積があります。

計算の準備
・クロネッカーのδ_{ij}
ベクトル、テンソルの計算に使用します。

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & (i \neq j) \\ \delta_{ij} = 1 & (i = j) \end{cases}$$

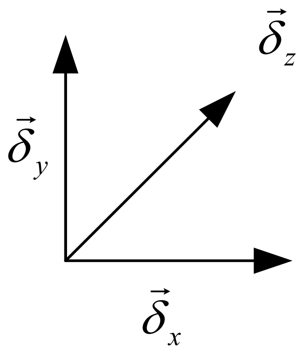
内積計算はこの記号を用いて下記で定義されます。

$$(\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) = \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} [\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k] &= (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j)\vec{\delta}_k \\ &= \delta_{ij}\vec{\delta}_k \end{aligned}$$

これは、内積の定義から説明されます。

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) \\ &= \left|\vec{\delta}_i\right|\left|\vec{\delta}_j\right|\cos\theta \\ &= \cos\theta \\ &= \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2} & (i \neq j) \\ \cos 0 & (i = j) \end{cases} \end{aligned}$$



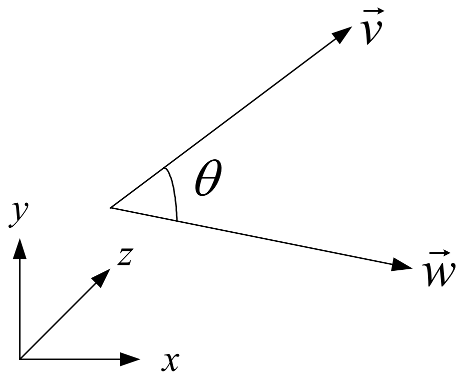
ベクトルとベクトルの内積

$$
\begin{aligned}
(\vec{v}\cdot\vec{w}) &= (\sum_{i=0}^{3}\vec{\delta}_i v_i \cdot \sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j w_j) \\
&= (\sum_{i=0}^{3}\vec{\delta}_i v_i \cdot \sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j w_j) \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(\vec{\delta}_i v_i \cdot \vec{\delta}_j w_j) \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) v_i w_j \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\delta_{ij} v_i w_j \\
&= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z
\end{aligned}
$$

上記の項のオーダーは、

(ベクトル・ベクトル) $= (1-2+1) = 0$

と計算されるので、スカラー量になります。



また、下記が成り立ちます。

$$(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{w}\cdot\vec{v})$$

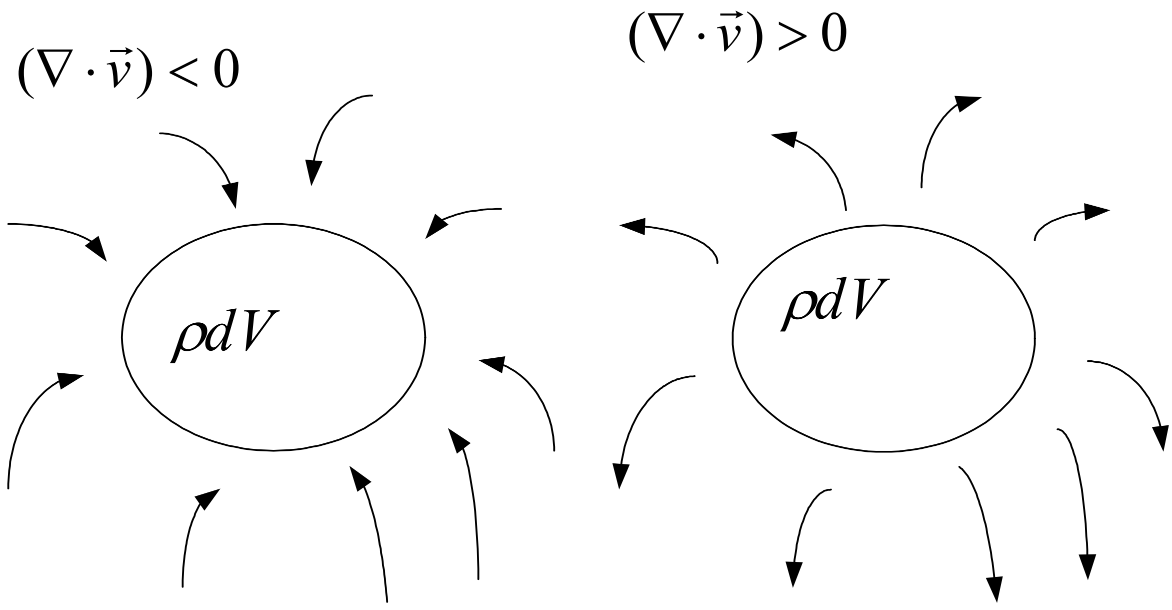
微分作用素とベクトルの内積

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\vec{v}) &= (\sum_{i=0}^{3}\vec{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\sum_{j=0}^{3}\vec{\delta}_j v_j) \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(\vec{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\vec{\delta}_j v_j) \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(\vec{\delta}_i\cdot\vec{\delta}_j)\frac{\partial}{\partial x_i}v_j \\
&= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

上記の項のオーダーは、

(微分作用素・ベクトル) $=(1-2+1)=0$

と計算されるので、スカラー量になります。この物理量は発散と呼ばれ、微小要素への流入・流出量を表しています。



$(\nabla\cdot\vec{v})<0$ → 微小要素へ物理量が流出した

$(\nabla\cdot\vec{v})=0$ → 微小要素への流入・流出は無い

$(\nabla\cdot\vec{v})>0$ → 微小要素へ物理量が流入した

上記からわかるように発散とは x, y, z 軸方向の勾配の和であり、0 の場合は、平らなので流入・流出は無いと解釈できます。

また、下記が成り立ちます。

$$(\nabla \cdot \vec{v}) \neq (\vec{v} \cdot \nabla)$$

微分作用素とテンソルの内積

$$[\nabla \cdot \vec{\tau}] = [\sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k \tau_{jk}]$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} [\vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k \tau_{jk}]$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} [\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk}$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \delta_{ij} \vec{\delta}_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \vec{\delta}_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \quad (i = j)$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \vec{\delta}_k \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \vec{\delta}_k (\frac{\partial \tau_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yk}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zk}}{\partial z})$$

$$= \vec{\delta}_z (\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z})$$

$$+ \vec{\delta}_y (\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z})$$

$$+ \vec{\delta}_z (\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z})$$

上記の項のオーダーは、

(微分作用素・テンソル) $= (1 - 2 + 2) = 1$

と計算されるので、ベクトル量になります。

また、下記が成り立ちます。

$$(\nabla \cdot \vec{\tau}) \neq (\vec{\tau} \cdot \nabla)$$

ラプラシアン作用素
ラプラシアン作用素は、微分作用素の内積で表されます。

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (\nabla \cdot \nabla) \\
&= (\sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= (\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i x_j} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

上記の項のオーダーは、
(微分作用素・微分作用素) $= (1 - 2 + 1) = 0$
と計算されるので、スカラー量になります。

全微分作用素
流体力学で使用する全微分作用素には、内積が使用されています。

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + (\sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i v_i \cdot \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + (\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i v_i \cdot \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \delta_{ij} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x_x} + v_y \frac{\partial}{\partial x_y} + v_z \frac{\partial}{\partial x_z}
\end{aligned}
$$

上記の項のオーダーは、
(ベクトル・微分作用素) = (1 − 2 + 1) = 0
と計算されるので、スカラー量になります。
これは、流体力学で使用されます。微小領域の変化量をテーラー展開した 1 次の項です。

内積から角度の計算
内積から 2 つのベクトルの角度が計算できます。

$$
\cos\theta = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{|\vec{v}||\vec{w}|}
$$

$$
\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{|\vec{v}||\vec{w}|}
$$

数値計算で要素の変形度や作成時に使用します。

・オーダー-1 の計算
オーダー-1 の計算には外積があります。

準備
外積の計算には次の記号が用いられます。

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 1 \quad (ijk = 123,\ 231,\ 312) \\ \varepsilon_{ijk} = -1 \quad (ijk = 321,\ 213,\ 132) \\ \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (i = j,\ j = k,\ k = i) \end{cases}$$

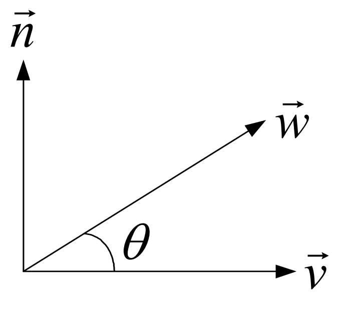
ベクトルとベクトルの外積

$$\begin{aligned} [\vec{v} \times \vec{w}] &= [\sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i v_i \times \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_j w_j] \\ &= [\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_i v_i \times \vec{\delta}_j w_j] \\ &= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} [\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j] v_i w_j \\ &= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_k v_i w_j \\ &= \varepsilon_{123} \vec{\delta}_z v_x w_y + \varepsilon_{231} \vec{\delta}_x v_y w_z + \varepsilon_{312} \vec{\delta}_y v_z w_x \\ &\quad + \varepsilon_{321} \vec{\delta}_x v_z w_y + \varepsilon_{213} \vec{\delta}_z v_y w_x + \varepsilon_{132} \vec{\delta}_y v_x w_z \\ &= \vec{\delta}_x (v_y w_z - v_z w_y) + \vec{\delta}_y (v_z w_x - v_x w_z) + \vec{\delta}_z (v_x w_y - v_y w_x) \end{aligned}$$

ベクトルとベクトルの外積の成分は、2 つのベクトルで表される平行四辺形の面積を表しています。次の様にも表されます。

$$[\vec{v} \times \vec{w}] = (|\vec{v}||\vec{w}| \sin\theta)\vec{n}$$

従って、2 つのベクトルが平行の時は、外積は 0 になります。



微分作用素とベクトルの外積

$$[\nabla \times \vec{v}] = [\sum_{i=0}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \sum_{j=0}^{3} \vec{\delta}_j v_j]$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} [\vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \vec{\delta}_j v_j]$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} [\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j] \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

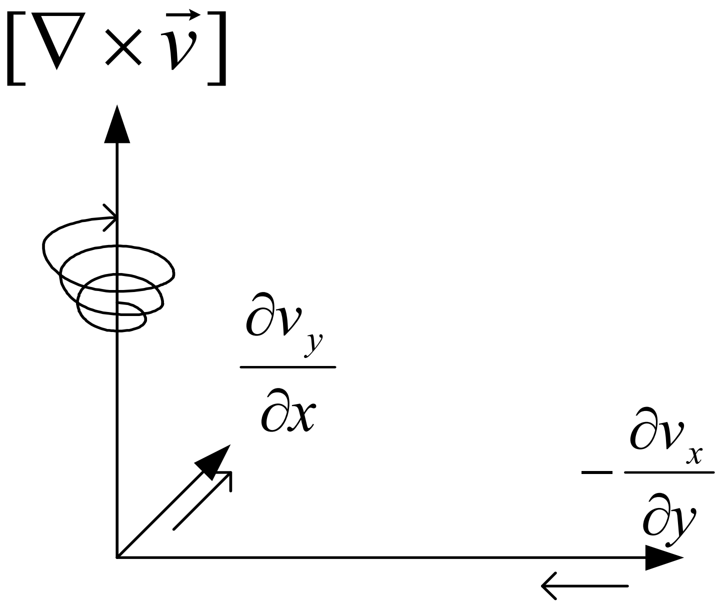
$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

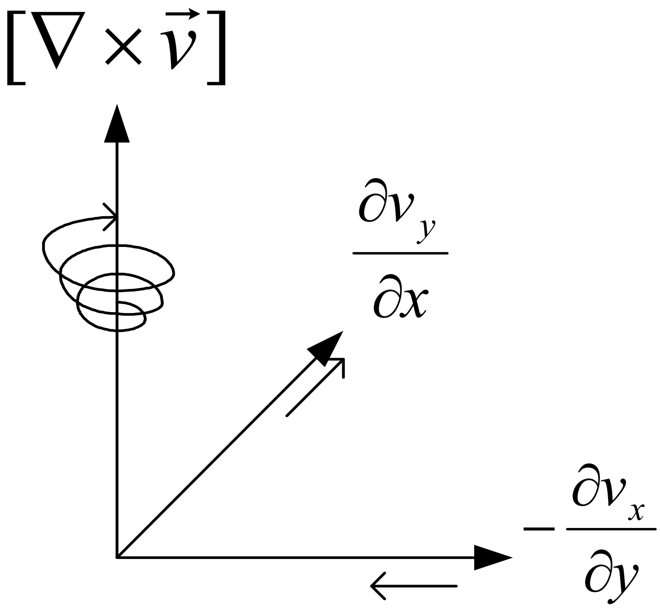
$$= \varepsilon_{123} \vec{\delta}_z \frac{\partial v_y}{\partial x_x} + \varepsilon_{231} \vec{\delta}_x \frac{\partial v_z}{\partial x_y} + \varepsilon_{312} \vec{\delta}_y \frac{\partial v_x}{\partial x_z}$$

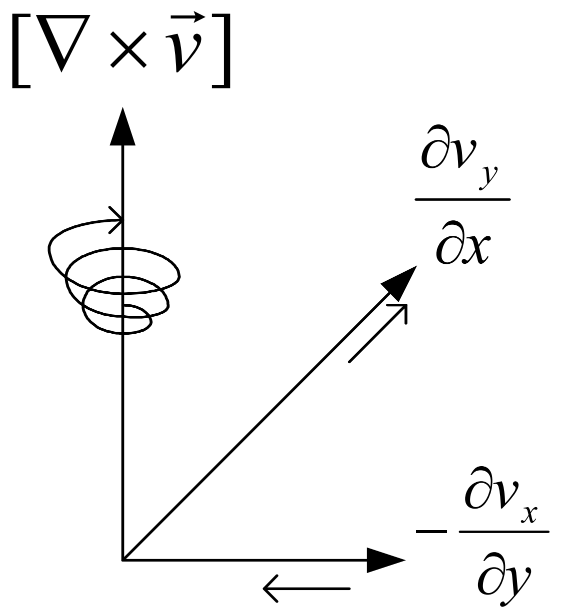
$$+ \varepsilon_{321} \vec{\delta}_x \frac{\partial v_y}{\partial x_z} + \varepsilon_{213} \vec{\delta}_z \frac{\partial v_x}{\partial x_y} + \varepsilon_{132} \vec{\delta}_y \frac{\partial v_z}{\partial x_x}$$

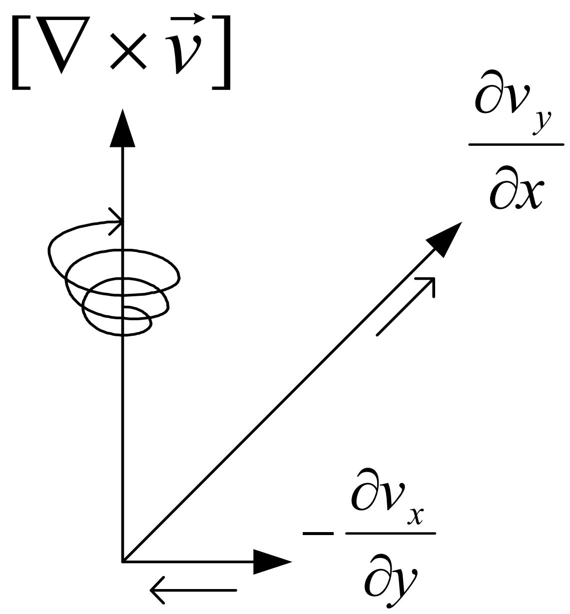
$$= \vec{\delta}_x (\frac{\partial v_z}{\partial x_y} - \frac{\partial v_y}{\partial x_z}) + \vec{\delta}_y (\frac{\partial v_x}{\partial x_z} - \frac{\partial v_z}{\partial x_x}) + \vec{\delta}_z (\frac{\partial v_y}{\partial x_x} - \frac{\partial v_x}{\partial x_y})$$

微分作用素とベクトルの外積は、渦度と呼ばれます。これは、台風や海の渦巻きの様に回転に対して垂直方向のベクトルを表しています。回転方向のベクトルを用いて表されます。


$[\nabla \times \vec{v}]$
$\frac{\partial v_y}{\partial x}$
$-\frac{\partial v_x}{\partial y}$


$[\nabla \times \vec{v}]$
$\frac{\partial v_y}{\partial x}$
$-\frac{\partial v_x}{\partial y}$





微小平面で考えると良くわかります。

・公式

流体力学で使用される公式を示します。

$$\Delta\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - [\nabla\times[\nabla\times\vec{v}]]$$

これは、ヘルムホルツ分解と言います。